Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Diplomová práca

2009 **Martin Bašták Ďurán**

Dejiny nekonečných radov

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Martin Bašták Ďurán

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
KATEDRA MATEMATICKJ ANALÝZY A NUMERICKEJ MATEMATIKY

Študijný odbor 9.1.1 Matematika

Vedúci diplomovej práce
Doc. RNDr. Ladislav Kvasz, Dr.

BRATISLAVA 2009

Poďakovanie

Ďakujem vedúcemu diplomovej práce Doc. RNDr. Ladislavovi Kvaszovi, Dr. za jeho odbornú pomoc a trpezlivosť a RNDr. Emilovi Pálešovi, CSc za inšpiráciu a nový, zmysluplný pohľad na dejiny.

Čestné vyhlásenie

Týmto vyhlasujem, že som diplomovú prácu vypracoval samostatne s odbornou pomocou vedúceho diplomovej práce a s pomocou uvedenej literatúry

Bratislava 17. 4. 2008 Martin Bašták Ďurán

Abstrakt

Bašták Ďurán Martin, Dejiny nekonečných radov (diplomová práca), Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra Matematickej analýzy a numerickej matematiky, Vedúci diplomovej práce: Doc. RNDr. Ladislav Kvasz, Dr., Bratislava, 2009.

Diplomová práca sa zaoberá dejinami nekonečných radov. Spracúva významné objavy od starovekého Egypta a Mezopotámie cez staroveké Grécko, stredovekú Európu a Novovekú Európu, ktoré formovali teóriu radov. V práci sú obsiahnuté a komentované jednotlivé výpočty starých matematikov. Súčasťou práce sú aj ich krátke životopisy. V závere je krátke a prehľadné zhrnutie jednotlivých objavov zahrnutých v tejto práci a objavy sú zakreslené na časovú os.

Kľúčové slová: nekonečné rady, dejiny matematiky, postupnosti

Abstract

Bašták Ďurán Martin, History of infinite series (diploma thesis), Comenius University in Bratislava, Faculty of Mmathematics, Physics and Informatics, Department of mathematical analysis and numerical mathematics, Supervisor: Doc. RNDr. Ladislav Kvasz, Dr., Bratislava, 2009.

This diploma thesis deals with the history of infinite series. It handles the significant discoveries from ancient Egypt and Mesopotamia through the ancient Greece, medieval Europe, Modern Europe, until the 19^{th} century, when the theory of infinite series was formed. The thesis covers and comments individual calculations stemming from different eras of the history of mathematicians. Part of this diploma thesis contains also short biographies. In the conclusion a short summary of the various discoveries included in this thesis are outlined on the time axis.

Keywords: infinite series, history of mathematics, sequences

OBSAH

Úvod

Predmetom mojej práce je vývoj nekonečných radov v dejinách matematiky. Touto témou sa celostne zaoberali napríklad Pavel Trojovský v článku *Kořeny a vývoj pojmu konvergentní číselná řada* (Trojovský 1996) a Ladislav Kvasz v článku *Dejiny mocninných radov* (Kvasz 1994). V knihe od Johna Stillwella *Mathematics and its history* (Stillwel 2004) je kapitola *Infinite Series* venovaná dejinám nekonečných radov. Formálna definícia nekonečného radu, používaná v súčasnej matematike je nasledovná:

„***Definícia***: Nech $\alpha = (a_n)$ je ľubovoľná reálna postupnosť. Radom (určeným postupnosťou α) nazývame usporiadanú dvojicu $(\alpha, s(\alpha))$, kde $s(\alpha)$ je postupnosť s n-tým členom

$$s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$$

Tento rad označujeme znakom $S(a_n)$. Hovoríme, že číslo a_n je n-tým členom radu a číslo s_n jeho n-tým čiastočným súčtom. Ak postupnosť (s_n) má limitu v $\overline{R}$, označujeme ju symbolom

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n .$$

Keď postupnosť (s_n) konverguje a $\lim s_n = s$, hovoríme, že rad $S(a_n)$ konverguje a má súčet *s*. Ak postupnosť (s_n) nekonverguje (tj. nemá vlastnú limitu), hovoríme, že rad $S(a_n)$ diverguje.“ (Kosmák 1984, s. 100)

Z definície vidíme, že postupnosť ako matematický objekt je úzko spojená s pojmom konečného i nekonečného radu. Pri radoch je dôležité skúmať to, či existuje súčet tohto radu alebo nie. V dejinách matematiky sa najprv objavujú rady konečné pričom matematické úlohy boli viac praktické ako teoretické. Kde sa človek v praxi môže stretnúť s nekonečným alebo konečným radom? S konečným radom sa môže stretnúť v prírode. Napríklad keby existovala papraď so siedmimi výhonkami a na každom výhonku by bolo ďalších sedem výhonkov a tak ďalej, tak počet výhonkov by tvoril geometrickú postupnosť teda $7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + 7^5 + \dots$. Z tejto postupnosti by sme mohli zostaviť konečný rad, ktorý by určoval počet všetkých výhonkov. Podobné úlohy sa vyskytujú na Egyptskom *Rhindovom papyruse* a u Fibonacciho , ktoré v ďalšej časti diplomovky uvediem. V matematike sa nekonečné rady využívajú napríklad pri počítaní Riemannovho integrálu. Majme nezápornú reálnu funkciu *f(x)* na intervale $\langle a,b \rangle$. Zaujíma nás obsah plochy pod funkciou *f* na tomto intervale. Obsah môžeme označiť $\int_a^b f(x)dx$. Interval rozdelíme na *n* častí takto $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ a zvolíme konečnú postupnosť čísel $t_0,\dots,t_{n-1}$. Súčet radu $\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)(x_{i+1} - x_i)$ nám aproximuje hľadaný obsah plochy. Keď zjemníme delenie intervalu tak, že norma delenia pôjde limitne k nule dostaneme nekonečný rad, ktorého suma bude presná hodnota obsahu plochy pod funkciou.

Dejiny matematiky sú aj dejiny myslenia a zrkadlí sa v nich vývoj ľudského vedomia. Môžeme vidieť napríklad, že v starovekom Egypte matematici ešte nekonečno pravdepodobne ani neuvažovali, v Grécku na neho narazili aj vďaka Zenónovým paradoxom a Eudoxovej exhaustačnej metóde, ale ešte s nekonečnom ako takým nepočítali. Až v novovekej Európe s nekonečnom už matematici počítali, čo postupne ukážem a doložím v ďalšej časti diplomovej práce. Uplatnenie poznatkov o vývoji nekonečných radov je možné využiť napríklad v pedagogike. Tak ako sa vyvíja ľudstvo tak sa vyvíja aj jednotlivec. Výučbu je lepšie začať jednoduchými úlohami zo staroveku, ďalej prejsť k zložitejším úlohám a problémom zo starého Grécka, pokračovať cez stredovek až do novoveku a až potom dôjsť k definíciám, prípadne vetám. Podobne ako rastlina rastie od klíčiaceho semienka cez listy, kvet a plod až k semienku.

Dejiny nekonečných radov môžeme rozdeliť na tri obdobia. ***Prvé obdobie*** spadá do staroveku. Z tohto obdobia uvádzam príklady zo starovekého Egypta a Mezopotámie. V tomto období ešte nemôžme hovoriť o nekonečných radoch, ale máme tu iba úlohy s konečnými aritmetickými a geometrickými postupnosťami. Úlohy sú ešte koncipované tak, že sa vzťahujú na nejaké skutočnosti zo zmyslového sveta. Čiže nejde o úlohy v ktorých by sa počítali rady ako abstraktná matematická štruktúra. ***Druhé obdobie*** začína v antickom Grécku. Nekonečné rady tu už nachádzame, ale starí Gréci sa manipulácii s nimi snažia vyhnúť, alebo sa dokonca domnievajú, že sa spočítať nedajú, ako je to vidieť na Zenónových paradoxoch. Úlohy sú v tomto období na rozhraní teórie a praxe. ***Tretie obdobie*** je obdobím, v ktorom matematici s nekonečnými radmi počítajú a rad ako pojem sa vyskytuje aj ako nezávislý od nejakej zmyslovej skutočnosti či od praktického kontextu, čiže vyskytuje sa aj v čisto teoretickej forme.

1 Nekonečné rady v staroveku

Počiatky dejín nekonečných radov začínajú v staroveku. V staroveku sa ešte nestretávame s radmi nekonečnými, ale stretávame sa s konečnými aritmetickými a geometrickými postupnosťami, ktoré sú logickým predchodcom nekonečných radov. Uvádzam niekoľko príkladov zo starovekého Egypta a Mezopotámie:

1.1 Egypt

To, z čoho čerpá dnešná veda informácie o egyptskej matematike sú hlavne *Rhindov papyrus*, ktorý bol napísaný pisárom Ahmesom asi v ***1650 p.n.l.***, ale ktorý je prepisom staršieho papyru napísaného za Amenehmeta III z ***19. storočia p.n.l.*** a *Moskovský papyrus* ktorého pôvod sa datuje do ***18. storočia p.n.l.***. *Rhindov papyrus* obsahuje 85 úloh a *Moskovský* 25 úloh. V týchto spisoch sa napríklad počítajú plochy polí podľa dĺžky ich strán a výpočet objemu budov (napr. pyramíd alebo obilných sýpok), ďalej sú tam úlohy so zlomkami, rovnice s jednou neznámou a úlohy s aritmetickou a geometrickou postupnosťou. V egyptskej matematike poznali a používali desiatkový systém a poznali štyri základné aritmetické operácie, vedeli počítať so zlomkami a riešiť niektoré zložitejšie aritmetické a geometrické problémy. Je pravdepodobné, že svoje matematické znalosti Egypťania využívali pri stavbe pyramíd, vyberaní daní, tvorbe kalendára a iných.

V *Rhindovom papyruse* sú dve úlohy, v ktorých sa pracuje s aritmetickou postupnosťou:

> „**R40:** Je treba rozdeliť 100 chlebov medzi 5 mužov tak, aby bola jedna sedmina z troch horných pre dvoch mužov dole." (Bečvář, Bečvářová, Vymazalová 2003, s. 69)

Celkový počet chlebov je 100 a je potrebné tieto chleby nejakým spôsobom rozdeliť medzi 5 mužov. V úlohe sa spomínajú traja horní muži a dvaja dolní. Toto naznačuje usporiadanie, ale nie je celkom isté, že ide o aritmetickú postupnosť. To vyplýva až z prezentovaného riešenia. Ďalej je tu podmienka, ktorú je možné interpretovať tak, že súčet počtu chlebov troch horných mužov v usporiadaní sa rovná súčtu chlebov dvoch mužov dole v usporiadaní. Úloha je riešená metódou chybného predpokladu. Zdá sa, že riešenie vyplýva z predstavy aritmetickej postupnosti tvaru:

$$1,\ 1+d,\ 1+2d,\ 1+3d,\ 1+4d,$$

Táto postupnosť udáva rozdelenie chlebov na 5 častí. Chybným predpokladom je to, že prvým členom tejto postupnosti je číslo 1. Podmienku že jedna sedmina z troch horných pre dvoch mužov dole môžeme vyjadriť vzťahom:

$$1 + (1+d) = 1/7((1+2d) + (1+3d) + (1+4d)),$$

z ktorého vypočítame, že $d = 5\frac{1}{2}$. Ide teda o postupnosť

$$1,\ 6\frac{1}{2},\ 12,\ 17\frac{1}{2},\ 23,$$

ktorej súčet je 60. Číslo 60 musíme vynásobiť číslom $1\frac{2}{3}$ aby sme získali požadovaný súčet 100. Týmto číslom musíme preto vynásobiť aj členy vyššie uvedenej postupnosti. Hľadaná aritmetická postupnosť je teda:

$$1\frac{2}{3},\ 10\frac{2}{3}\frac{1}{6},\ 20,\ 29\frac{1}{6},\ 38\frac{1}{3},$$

ktorej diferencia je $9\frac{1}{6}$ (tento výsledok však na papyruse nie je uvedený).

V súčasnosti by sa tento príklad počítal asi tak, že chybný predpoklad by sa nahradil neznámou. Dostali by sme dve rovnice o dvoch neznámych:

$$a + (a + d) + (a + 2d) + (a + 3d) + (a + 4d) = 100$$

$$a + (a + d) = \frac{1}{7}((a + 2d) + (a + 3d) + (a + 4d))$$

Jednoduchým výpočtom by sme sa dostali k tomu istému riešeniu.

Znenie ďalšej úlohy je takéto:

> „**R64:** Je treba rozdeliť 10 meríc jačmeňa medzi desať mužov tak, aby množstvá tvorili aritmetickú postupnosť s diferenciou 1/8.“) (Bečvář, Bečvářová, Vymazalová 2003, s. 69)

Opäť ide o úlohu na delenie. Táto úloha má názov „Metóda počítania s rozdielom peru“, čo charakterizuje aritmetickú postupnosť. V samotnom texte je uvedené, že rozdiel pre každého muža voči druhovi je 1/8 merice. Týmto rozdielom peru je práve diferencia aritmetickej postupnosti. Riešenie vychádza z aritmetickej postupnosti:

$$a - 9d,\ a - 7d,\ a - 5d,\ a - 3d,\ a - d,\ a + d,\ a + 3d,\ a + 5d,\ a + 7d,\ a + 9d,$$

kde a je tzv. hlavná časť tj. aritmetický priemer všetkých členov tejto postupnosti a $2d$ je diferencia. Vzhľadom k tomu, že súčet všetkých členov postupnosti je $10a$, čo má byť rovné 10, je $a = 1$. Zrejme $d = 1/16$. Najväčším členom postupnosti je teda

$$a+9d=1\frac{1}{2}\frac{1}{16}$$

Postupným odčítavaním diferencie $2d$ od tohto najväčšieho člena získame ďalšie členy:

$$1\frac{1}{2}\frac{1}{16},1\frac{1}{4}\frac{1}{8}\frac{1}{16},1\frac{1}{4}\frac{1}{16},1\frac{1}{8}\frac{1}{16},1\frac{1}{16},\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{8}\frac{1}{16},\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{16},\frac{1}{2}\frac{1}{8}\frac{1}{16},\frac{1}{2}\frac{1}{16},\frac{1}{4}\frac{1}{8}\frac{1}{16}$$

Táto úloha by sa dala riešiť v súčasnosti takto: ide o aritmetický rad $\sum_{n=1}^{10} a+nd=10$ kde $d=\frac{1}{8}$.

Vyriešením tejto rovnice dostávame $a=\frac{5}{16}$, vďaka čomu sa dajú vyčísliť všetky členy postupnosti.

Na jednom z *Káhúnských papyrusov* (**1825 p.n.l.**) je bez akéhokoľvek slovného vysvetlenia stĺpec desiatich čísel, ktoré tvoria aritmetickú postupnosť. Ide o príklad **K2**. Z hora dole sú napísané tieto čísla:

$$13\frac{2}{3}\frac{1}{12},\ 12\frac{2}{3}\frac{1}{6}\frac{1}{12},12\frac{1}{12},11\frac{1}{6}\frac{1}{12},10\frac{1}{3}\frac{1}{12},9\frac{1}{3}\frac{1}{6}\frac{1}{12},8\frac{2}{3}\frac{1}{12},7\frac{2}{3}\frac{1}{6}\frac{1}{12},7\frac{1}{12},6\frac{1}{6}\frac{1}{12}.$$

Vo vedľajšom stĺpci je deviatimi vynásobená polovica diferencie, tj. číslo $\frac{1}{3}\frac{1}{12}$:

$$9\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{12}\right)=3\frac{2}{3}\frac{1}{12}$$

Nasledujúca úloha je úloha na geometrickú postupnosť.

> „**R 79:** Je 7 domov, 49 mačiek, 343 myší, 2401 klasov pšenice, 16 807 meríc. Všetko dohromady je 19 607.“ (Bečvář, Bečvářová, Vymazalová 2003, s. 71)

Asi takto môžeme interpretovať zmysel textu v tomto príklade. Nachádzame tu päťčlennú geometrickú postupnosť s koeficientom 7 a jej súčet. Má názov Majetok. V úlohe je teda vypočítaný súčet geometrickej postupnosti:

$$7+7^2+7^3+7^4+7^5=7+49+343+2401+16807=19607.$$

Z týchto príkladov môžeme usudzovať že v Egypte úlohy na rady už existovali, ale išlo len o konečné rady a teoretický pojem radu v týchto príkladoch nenachádzame. Napriek tomu sú to jedny z prvých príkladov použitia konečných radov v dejinách.

1.2 Mezopotámia

Matematika Mezopotámie bola na vyššej úrovni ako matematika egyptská. V Mezopotámii boli objavené dôležité algoritmy pre riešenie rozmanitých úloh. Okrem desiatkovej číselnej sústavy používali aj číselnú sústavu šesťdesiatkovú. Vynašli pozičný číselný systém. Poznali štyri základné aritmetické operácie, ale poznali aj umocňovanie a odmocňovanie. Vedeli počítať so zlomkami. Poznali vetu o vzťahu štvorcov nad stranami pravouhlého trojuholníka, neskôr pomenovanú *Pytagorova veta*. Riešili rovnice o troch neznámych, planimetrické aj stereometrické úlohy. Väčšina tabuliek s matematickými textami pochádza z druhého tisícročia p.n.l.. Zo starobabylonského obdobia sa zachovalo niekoľko tabuliek, ktoré obsahujú príklady vedúce k aritmetickej postupnosti. Je v nich väčšinou riešený problém rozdelenia nejakého majetku (práce a pod.) medzi dopredu daný počet ľudí.

Prvá úloha na tabuľke Strssbg. 362 pochádza zo Starobabylonskej ríše (asi **2000** až **1800 p.n.l.**) a je venovaná aritmetickej postupnosti. Jej text nie je príliš jasný:

> „(10) bratov, (1) a 2/3 mín striebra, brat nad bratom dostáva časť, koľko, ja neviem. Diel ôsmeho brata je (6) šekelov. Brat za bratom dostáva koľko? “ (Bečvář, Bečvářová, Vymazalová 2003, s. 239)

V úlohe sa má pravdepodobne rozdeliť $1\frac{2}{3}$ mín striebra medzi desať bratov tak, aby ich podiely tvorili aritmetickú postupnosť, pričom je daný majetok ôsmeho brata. Nie je jasné či ide o postupnosť zostupnú alebo vzostupnú, teda nie je jasné či deviaty brat dostane o diferenciu viac alebo menej ako brat ôsmy. Riešenie príkladu je zapísané takto:

> „Ty svojím spôsobom vyrátaj prevrátenú hodnotu (10), počtu ľudí, získal si (0;6).“

Návod na riešenie hovorí, že je potrebné vypočítať prevrátenú hodnotu počtu ľudí, čo je 0,1. V šesťdesiatkovej sústave je to (0;6).

> „Vynásob (0;6) a (1) a 2/3 mín striebra. (10) šekelov si získal.“

(1) a 2/3 mín striebra (1 mína je 60 šekelov) je 100 šekelov. Vynásobené 0,1 je 10 šekelov, čo je priemerný diel pripadajúci na jedného brata.

> „Zdvoj (10). Dostaneš (20). (6), časť ôsmeho brata, zdvoj. (12) si získal.
> Odčítaj (12) od (20). (8) získavaš. (8) si udrž v pamäti.“

Keď označíme členy uvažovanej postupnosti symbolmi $a_1, a_2, ..., a_{10}$ tak $a_3 + a_8 = 20$, pretože v aritmetickej postupnosti platí $x = a_1 + a_{10} = a_2 + a_9 = a_3 + a_8 = a_4 + a_6 = a_5 + a_6$ a priemerná hodnota $\frac{5x}{10} = 10$ z čoho je vidieť že $x = 20 = a_3 + a_8$. Keď je postupnosť zostupná tak vieme že $a_3 + a_8 = 2a_8 + 5d = 20$. Odčítaním dvojnásobku dielu ôsmeho brata dostaneme číslo 8. Ďalšia úloha má takéto znenie:

> „(1) a (1) ša-ap-li-a-am(význam tohto výrazu nie je jasný) sčítaj, (2) si získal. (2) zdvoj. (4) si získal. (1) a (4) sčítaj. (5) si získal. (5) od (10), počet ľudí odčítaj. (5) si získal. Vypočítaj prevrátenú hodnotu od (5). (0;12) si dostal. (0;12) vynásob (8). Získal si (1;36). (1;36) je to čím sa líši brat od brata.“ (Bečvář, Bečvářová, Vymazalová 2003, s. 240)

Nie všetko z návodu je jasné, ale k výsledku vedú inštrukcie v posledných dvoch riadkoch. Po vynásobení čísla 8 prevrátenou hodnotou 5 dostávame diferenciu d = (1;36)=1,6. Text úlohy je poškodený. Výpočet jednotlivých členov postupnosti chýba. Vo výsledku sa mohli objaviť tieto čísla:

$$17\frac{1}{5}, 15\frac{3}{5}, 14, 12\frac{2}{5}, 10\frac{4}{5}, 9\frac{1}{5}, 7\frac{2}{5}, 6, 4\frac{2}{5}, 2\frac{4}{5}.$$

Túto úlohu by bolo možné so súčasnými znalosťami matematiky vyriešiť takto: (1) a 2/3 mín striebra je 100 šekelov, čo je celkový súčet $\sum_{n=0}^{9} a_{10} + nd = 10a_{10} + 45d = 100$. Diel ôsmeho brata je $a_8 = a_{10} + 2d = 6$. Dostávame rovnicu o dvoch neznámych. Vypočítaním tejto sústavy dostaneme diferenciu $d = \frac{8}{5}$ a jednotlivé členy postupnosti sú $a_1 = 17\frac{1}{5}, a_2 = 15\frac{3}{5}, ..., a_{10} = 2\frac{4}{5}$.

Piata úloha z tej istej tabuľky býva chápaná ako aplikácia aritmetickej postupnosti v praxi. Jej značne poškodený text znie takto:

> „Stena. (10) gar, (1) a 1/2 gar šírky. (3) dozorcovia majú po (3) gar (4) lakťov na diaľku vziať. Prvý má (60) mužov, druhý (1,20), tretí (1,40) mužov. Započato s (5) lakťami výšky, získané (...) hmoty zeme. Stena (...) a koľko až hmoty zeme?“ (Bečvář, Bečvářová, Vymazalová 2003, s. 240)

V tomto príklade ide o stenu tvaru zrezaného klinu. Stena má dĺžku 10 gar (120 lakťov), šírku 1 a 1/2 gar (18 lakťov) a je rozdelená na tretiny. Na prvom úseku má pracovať 60 mužov, na druhom 80 a na treťom 100 mužov. Tieto počty tvoria aritmetickú postupnosť o troch členoch a s diferenciou 20. Výška steny v najnižšej časti je 5 lakťov. Je asi potrebné vypočítať hmotu potrebnú na vybudovanie steny. Postup ani výsledok na tabuľke uvedené nie sú.

Na tabuľke YBC 4608 zo Starobabylonskej ríše je úloha: Pole tvaru pravouhlého trojuholníka, ktorého jedna odvesna ja l = (6,30) a obsah S = (11,22,30), sa má rozdeliť medzi 6 bratov tak, aby ich diely tvorili aritmetickú postupnosť. Odvesna l = (6,30) (dĺžka) sa rozdelí na 6 rovnakých dielov. Každý má dĺžku (1,5). ďalej sa vypočíta druhá odvesna b_1 (šírka) uvažovaného trojuholníkového poľa.

$$b_1 = \frac{2S}{l} = (22,45,0) \div (6,30) = (3,30)$$

Odvesna b_1 = (3,30) sa rozdelí na 6 rovnakých dielov. Jeden diel má 35. Potom sú vypočítané šírky polí jednotlivých bratov. Každá je o 35 menšia ako šírka dielu predchádzajúceho brata:

$$\begin{aligned} b_1 &= (3,30) \\ b_2 &= (2,55) \\ b_3 &= (2,20) \\ b_4 &= (1,45) \\ b_5 &= (1,10) \\ b_6 &= (35) \end{aligned}$$

Poškodený text končí výpočtom šírok jednotlivých dielov.

V klasickom období sa na tabuľke AO 172 64 zachovala ešte zložitejšia úloha, v ktorej sa medzi šesť bratov rozdeľuje pozemok tvaru lichobežníka o základoch 217 a 135 a ramenách 81 a 51. Rozdelenie má byť urobené tak, aby dvojica po sebe nasledujúcich bratov dostala rovnako a aby rozdiel medzi po sebe nasledujúcimi dvojicami bol konštantný.

Na tabuľke Strssbg. 362 je úloha, v ktorej sa pracuje s geometrickou postupnosťou s koeficientom 2. Jej text znie takto:

> „Úsečka. Po (1) lakeť (1) prst až k úplnému súčtu aby sa zdvojoval. K akej dĺžke si šiel? Išiel som až k (1) garu a (3) a 1/2 lakťa dĺžky.“ (Bečvář, Bečvářová, Vymazalová 2003, s. 244)

V úlohe je zadaná úsečka dĺžky 1 lakeť a 1 prst, tj. (1;2) lakťa. Táto úsečka je zväčšovaná v geometrickej postupnosti. Súčet dĺžok všetkých úsekov je 1 gar a 3 a 1/2 lakťa, čo je (15;30) lakťa. Medzi štvrtým a piatym príkladom na tabuľke je poznamenané číslo 4, čo je počet členov geometrickej postupnosti zo štvrtého príkladu. Buď je vedľa dĺžky úsečky a = (1;2) lakťa daný tiež počet členov postupnosti. tj.(4), a má sa vypočítať súčet dĺžok, čo sa zdá pravdepodobnejšie, alebo je daný súčet dĺžok, tj. (15;30), a má sa vypočítať počet členov postupnosti. Postup riešenia ale chýba.

1.3 Grécko

Grécka matematika nadväzuje na matematiku Egypta a Mezopotámie. Kým v egyptskej a mezopotámskej matematike sú úlohy riešené algoritmicky Grécka matematika sa stala deduktívnou, bola začlenená pod filozofiu a bola viac abstraktnou ako v Egypte a Mezopotámii. V Starovekom Grécku sa rozvíjala prevažne geometria, ale aj teória čísel. Matematika v tomto období je spojená s významnými osobnosťami ako sú Táles, ktorý je známy vďaka Tálesovej kružnici, Pytagoras ktorý sa zaoberal aj figurálnymi číslami, ktoré sú geometrickým poňatím prirodzených čísel, Eudoxos, ktorý vyvinul exhaustívnu metódu, Euklides, ktorý vo svojej knihe nazvanej *Základy* položil základy geometrie, Archimedes ako významný mechanik staroveku.

1.3.1 Zenón z Eley (približne 490 – 430 p.n.l.)

Zenón z Eley bol Parmenidov žiak a hlavou eleatskej školy. Aristoteles ho označil za najmúdrejšieho z Grékov a Platón za zakladateľa dialektiky. Je známy hlavne kvôli tomu, že zostavil ***apórie***, paradoxné tvrdenia. Pôvodne bolo vraj týchto *apórií* vyše 40 ale zachovalo sa z nich len 9. Jedna z *apórií*, v ktorej sa vyskytuje aritmetický rad je nazvaná Dichotómia a jej znenie by sa dalo parafrázovať asi takto:

Pohyb neexistuje, pretože keď sa objekt pohybuje z bodu A do bodu B musí najprv prekonať polovicu vzdialenosti, potom polovicu z polovice a tak ďalej... Toto delenie sa nikdy neskončí, preto sa teleso do bodu B nikdy nedostane. Tento príklad sa dá vyjadriť matematicky ako súčet nekonečného radu. Keď napríklad vzdialenosť z bodu A do B je 1, dá sa táto úvaha matematicky vyjadriť takto: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots$. V súčasnosti vieme tento rad sčítať pomocou limity jeho čiastočných súčtov. To že súčet nekonečne veľa členov môže byť konečné číslo sa ale na prvý pohľad naozaj javí ako paradox.

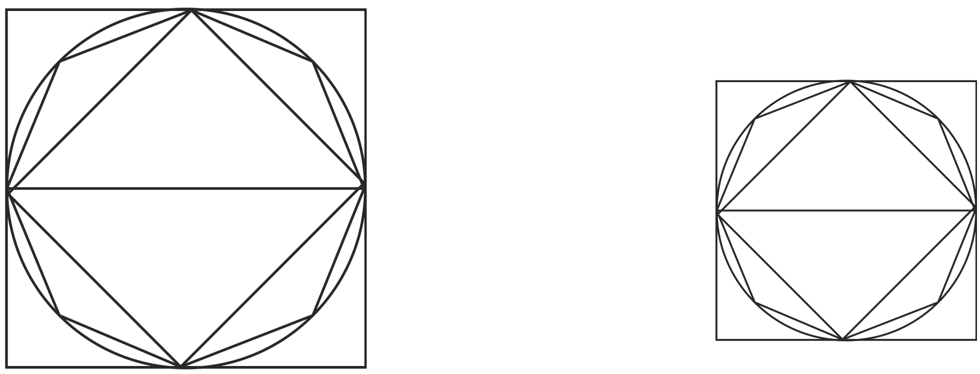
1.3.2 Eudoxos z Knidu (asi 408 – 355 p.n.l.)

Eudoxos z Knidu je priamy Euklidov predchodca. Vytvoril v Kyziku vlastnú školu, ktorá síce nadväzovala na pytagorejcov a platonikov, vystupovala však proti astrológii a mystike. Podporoval naopak pozorovanie a experimentovanie. Eudoxos nebol len matematikom, ale aj astronómom. Počas pobytu v Egypte si osvojil egyptské astronomické znalosti. Postavil v Knide astronomické observatórium a vytvoril prvú čisto matematickú teóriu pohybu planét. Najdôležitejší Eudoxov prínos do matematiky je teória proporcií. S teóriou proporcií úzko súvisí **metóda**, ktorá v 17. stor. dostala meno **exhaustívna** (vyčerpávajúca). Vysvetlím ju na príklade:

Chceme ukázať, že pomer obsahov dvoch kruhov je rovný pomeru obsahov štvorcov zostrojených nad ich priemermi. Podstatou dôkazu je porovnávanie obsahov mnohouholníkov vpísaných do kruhov, ktoré ich budú postupne "vyčerpávať". V súčasnom ponímaní sa ich obsahy limitne budú blížiť k obsahom kruhov. Vpíšme do kruhov s polomermi *d, D* štvorce s obsahom *a, A* (obr.1). Potom platí vzťah $\frac{a}{A} = \left(\frac{d}{D}\right)^2$. Pre obsah vpísaných štvorcov platí $a = 2d^2$ a $A = 2D^2$ takže rovnosť platí. $\left(\frac{d}{D}\right)^2$ tu teda predstavuje pomer obsahu dvoch vpísaných štvorcov. Plocha vpísaného štvorca *a* je väčšia ako polovica obsahu jemu opísanému kruhu *k* ($a > \frac{k}{2}$), pretože *a* sa rovná polovici štvorca opísaného kruhu *k*. (*a = m/2,* kde *m* je plocha štvorca opísaného kruhu s obsahom *k*). To platí aj pre obsah kruhu *K* a obsah jemu opísaného štvorca *A*. Vpíšeme do obidvoch kruhov pravidelné osemuholníky s obsahmi *B* a *b* rozdelením príslušných oblúkov na polovicu. Obsah každého trojuholníka pridaného k štvorcu je väčšia ako plocha polovice kruhového výseku do ktorého je vpísaný, čo je vidieť keď doplníme polovicu trojuholníka do obdĺžnika, v ktorom sa daný kruhový výsek bude nachádzať. Plocha *a* bola väčšia ako polovica obsahu kruhu. Keď odčítame *a* od obsahu kruhu *k* tak táto časť je menšia ako polovica kruhu ($k - a < \frac{k}{2}$). V tejto časti obsahu kruhu pridávame spomenuté trojuholníky, ktorých obsahy sú väčšie ako polovice kruhových výsekov, takže súčet obsahov všetkých trojuholníkov (označíme *t*) je väčší ako polovica súčtu obsahov jednotlivých kruhových výsekov ($t > (k - a)/2 > \frac{k}{4}$). To znamená že plocha $b >$ $3/4k$ a analogicky $B > 3/4K$. Pre plochy b, B platí: $\frac{b}{B} = \left(\frac{d}{D}\right)^2$. Pokračujeme postupným vpisovaním šestnásťuholníkov C, c , tridsaťdvauholmíkov E, e .... Ich plochy budú väčšie ako $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2i} k$, $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2i} K$ pre nejaké n a bude pre ne platiť vzťah : $\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C} = \frac{e}{E} = \ldots = \left(\frac{d}{D}\right)^2$. Vpísané mnohouholníky budú stále viac vyčerpávať obsahy kruhov *k, K.*

Podľa Eudoxovej vety platí, že ak od veličiny V odčítame najprv veličinu väčšiu ako polovica V, potom od zvyšku odčítame veličinu väčšiu ako jeho polovica, dostaneme po dostatočne veľkom počte krokov zvyšok, ktorý je menší ako ľubovoľná vopred daná veličina v.

K dôkazu toho, že pomer obsahov kruhov ja rovný pomeru obsahov im vpísaných štvorcov použil Eudoxos nepriamy dôkaz. Z predpokladu, že pomer plôch kruhov *k/K* je väčší alebo menší ako pomer štvorcov dochádzalo k sporu.



obr.1

1.3.3 Euklides (4. až 3. st. p. n. l.)

Tak ako o väčšine významných starovekých matematikoch, i o živote Euklida sa zachovalo len málo. Predpokladá sa, že geometriu si osvojil v Aténach. Podľa Pappa (2. pol. 2. stor. n.l.) založil v Alexandrii vlastnú školu. Aj keď je Euklides autorom mnohých pojednaní, do dejín matematiky vošiel hlavne ako tvorca *Základov*. Euklidove *Základy* sa skladajú z 13 kníh. Ich obsahom je predovšetkým štúdium geometrických útvarov v rovine a náuku o celých (kladných) číslach a zlomkoch.

VIII. kniha sa zaoberá „spojitými proporciami", čiže geometrickou postupnosťou a 35. veta IX. knihy rieši ***súčet konečného geometrického radu***. V našej algebraickej reči jeho riešenie môžeme zapísať takto: Nech $a_{n+1}, a_n, ..., a_1$ sú členy geometrického radu. Pre ne platí:

$$a_{n+1} : a_n = a_n : a_{n-1} = ... = a_2 : a_1$$

a teda aj

$$(a_{n+1} - a_n) : a_n = (a_n - a_{n-1}) : a_{n-1} = ... = (a_2 - a_1) : a_1$$

odtiaľ podľa skôr dokázanej vlastnosti proporcie (12. veta, VII. kniha)

$$(a_{n+1} - a_1) : (a_n + a_{n-1} + ... + a_1) = (a_2 - a_1) : a_1$$

Ak označíme $a_{n+1} : a_n = q$ tak dostaneme

$$(a_{n+1} - a_1) : (a_n + a_{n-1} + ... + a_1) = q - 1$$

z toho

$$(a_n + a_{n-1} + ... + a_1) = (a_{n+1} - a_1) : q - 1$$

a z toho že

$$a_{n+1} - a = a_1\left(\frac{a_n}{a_1} - 1\right) = a_1(q^n - 1)$$

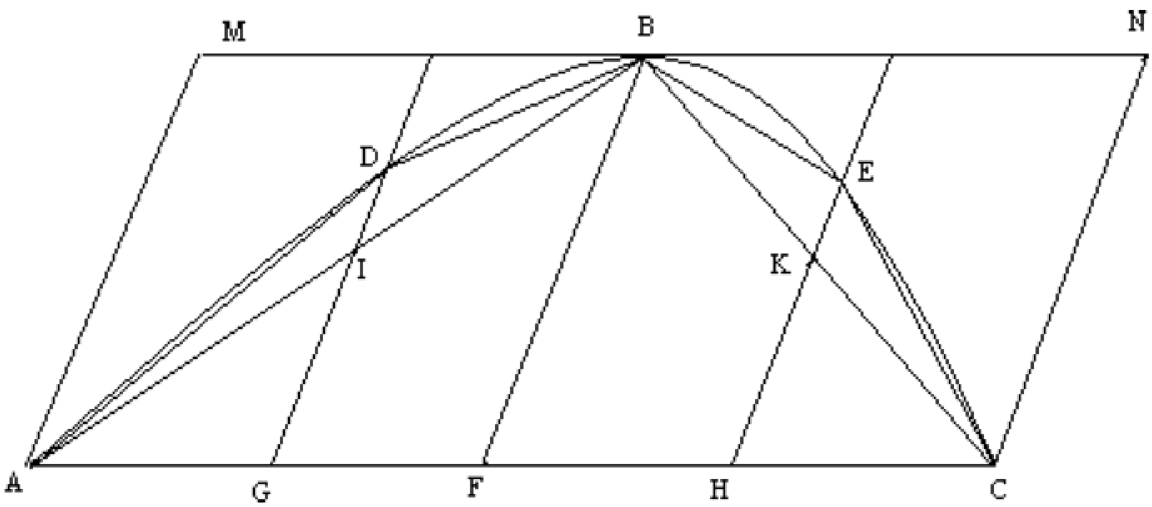
už dostávame nám dobre známy súčtový vzorec pre *n* členov geometrickej postupnosti.

$$(a_n + a_{n-1} + ... + a_1) = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

1.3.4 Archimedes zo Syrakus (okolo 287 do 212 p.n.l.)

Najväčší matematik a mechanik staroveku. Vzdelania sa mu dostalo od jeho otca astronóma a matematika Feidia a neskôr v Alexandrii, kde sa zblížil s Euklidovými žiakmi a s nimi si po návrate do vlasti dopisoval o odborných otázkach. Podľa rôznych svedectiev a neskorších prameňov je známe, že Archimedes využíval svoje znalosti hojne v praxi. Vynašiel čerpadlo, používal systém pák a kladiek, kladkostrojov a skrutiek pri zdvíhaní ťažkých bremien a pri konštrukcii vojenských vrhacích strojov. Ďalej objavil hydrostatický zákon, ktorý nesie jeho meno. Na rozdiel od Euklidovej snahy o usporiadanie vtedajších poznatkov, Archimedes vniesol do matematiky vlastné objavy, predovšetkým stanovenie obsahov krivočiarych útvarov v rovine a objemov telies ohraničených krivými plochami. Na týchto objavoch bol budovaný v novoveku integrálny počet.

Vo svojej úlohe, ktorá bola neskôr nazvaná *Kvadratúra paraboly*, využíva Eudoxovu exhaustačnú metódu. Ide o stanovenie obsahu výseku paraboly vyťatej ľubovoľnou tetivou. K výsledku dospel pomocou mechanického riešenia, a potom toto riešenie dokázal geometrickými prostriedkami. Teda na základe exhaustačnej metódy zistil, že obsah výseku paraboly je rovný $\frac{4}{3}$ obsahu trojuholníka ABC vpísaného do výseku s rovnakou základňou a výškou ako parabola. Majme parabolu a vpísaný trojuholník ABC (obr. 1.). Tento trojuholník je osemkrát väčší ako každý z trojuholníkov ADB, BEC. Podobne každý z trojuholníkov vpísaných do paraboly so základňami AD, DB, BE, EC je šestnásťkrát menší ako trojuholník ABC. Konštruovaním ďalších trojuholníkov a sčítavaním ich plôch dostávame geometrický rad s koeficientom $\frac{1}{4}$ $\left(o * \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^n} + \dots\right)\right)$ktorého súčet pre n idúce do nekonečna je obsah paraboly, ktorý sa rovná $\frac{4}{3} * o$, kde o je obsah trojuholníka ABC. Táto úloha nehovorí celkom o prínose Archimeda do teórie radov, pretože on nič nové nevymyslel, ale použil Eudoxovu exhaustačnú metódu.



obr. 1

2 Nekonečné rady v stredovekej Európe

V stredovekej Európe teória nekonečných radov veľmi nepokročila oproti Gréckej matematike. U Fibonacciho nachádzame súčtové vzorce pre aritmetickú a geometrickú postupnosť a po ňom pomenovanú Fibonacciho postupnosť. Súčtom nekonečných číselných radov sa zaoberal Swineshead aj Oresme. Oresme dokázal divergenciu harmonického radu.

2.1 Leonardo Pisánsky (Fibonacci) (1170 - 1240)

V 12. – 13. storočí sa v talianskom meste Pisa bohato rozvíjal obchod, peňažníctvo a remeslá. V tomto meste sa narodil pisárovi Bonacciovi syn Leonardo. V meste Bougie sa naučil aritmetickým postupom. Svoje matematické vedomosti ďalej rozširoval, keď cestoval za obchodom do Egypta, Sýrie, Byzancie, na Sicíliu a do Provence. Napísal knihu *Kniha o abaku („Liber abac!i“)*, ktorá bola jedna z najdôležitejších nositeľov novej aritmetiky a ďalších matematických znalostí v Európe. V tejto knihe usporiadal vedomosti z arabských prác, ku ktorým pridal niečo z Euklidovej geometrie a pridal tam tiež vlastné úlohy a metódy.

V XII. kapitole sa zaoberá okrem iného sčítaním aritmetickej a geometrickej postupnosti, postupnosti štvorcov prirodzených čísel a sčítanie rekurentnej postupnosti pomenovanej podľa neho (***Fibonacciho postupnosť***), ktorá je daná vzťahom $a_0 = 1,\quad a_1 = 1,\quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$. Jej jednotlivé členy tvoria teda postupnosť prirodzených čísel: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$. Touto postupnosťou sa zaoberal aj novoveký matematik Abraham de Moivre, ktorý žil asi o 500 rokov pozdejšie. On objavil formulu na vyjadrenie n-tého člena tejto postupnosti.

V jeho diele je ďalej úloha, ktorá je podobná vyššie uvedenej úlohe z Egypta (R79): Je 7 starien, každá má 7 mulov, na každého z nich naložila 7 vriec, v každom vreci je 7 chlebov, pri každom chlebe je 7 nožov a každý nôž je v 7 pošvách. Koľko je všetkého dohromady? (137 256).

2.2 Richard Swineshead (14.storočie)

Skúmal rovnomerne zrýchlený pohyb. Riešil úlohu v ktorej sa v časových intervaloch $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots$ postupne rýchlosť zväčšuje podľa nekonečnej aritmetickej postupnosti 1, 2, 3, ... Dokazuje slovne že stredná rýchlosť je 2. Ide o rad:

$$1*\frac{1}{2}+2*\frac{1}{2^2}+3*\frac{1}{2^3}+...=2$$

V dôkaze vychádza zo znalosti súčtu geometrického radu

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...=1$$

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}...=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2^3}+...=\frac{1}{4}$$

Po vertikálnom sčítaní ľavých strán rovníc dostávame rad z úlohy a ten sa rovná súčtu ľavých strán rovníc:

$$1*\frac{1}{2}+2*\frac{1}{2^2}+3*\frac{1}{2^3}+...=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}...=2$$

2.3 Nicole Oresme (1323 - 1382)

Francúzky magister umení a doktor teológie Nicole Oresme bol jedným z priekopníkov vedeckej literatúry vo francúzštine a preložil niekoľko diel Aristotela. Vystupoval proti prehmatom v cirkvi, proti astrológii a vešteniu, ale sám ešte veril v mágiu. Veľa jeho prác je venovaných astronómii a mechanike. Teórii proporcií venoval dve diela : *Traktát o pomeroch* (Tractatus proportionum) a *Algoritmus pomerov* (Algorismus proportionum)

Ako prvý dokázal ***divergenciu harmonického radu***. Harmonický rad je ukážkou toho že nie všetko je také ako sa na prvý pohľad zdá. V prípade tohto radu sa pozorovateľovi zdá, že rad súčet má, pretože jeho členy sa zmenšujú, ale pravdou je opak a Oresme to dokázal takouto úvahou: Súčet $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...$bude nekonečný pretože súčet $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{2}$, súčet častí od $\frac{1}{5}$ do $\frac{1}{8}$ je väčší ako $\frac{1}{2}$, súčet častí od $\frac{1}{9}$ do $\frac{1}{16}$ tiež atď.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+...>1+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+...$$
$$>1+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+...=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+...$$

Jeho ďalším výsledkom je, že zistil, že ak k veličine a pričítame jej postupne zmenšujúce sa časti $\frac{a}{n},\frac{a}{n^2},\frac{a}{n^3},...$ (kde $n>1$) tak ich súčet nebude nikdy nekonečný.

V treťom diele traktátu *O konfigurácii kvalít*, v ktorom rozoberá príklady pohybov v ktorých sa rýchlosť v jednotlivých intervaloch mení skokom, alebo ešte zložitejšie, sa vyskytuje súčet radu $\frac{1}{2}+\frac{3}{8}+\frac{1}{4}+\frac{3}{16}+\frac{1}{8}+\frac{3}{32}+...=\frac{7}{4}$. Pri sčítaní tohto radu vychádzal z toho, že každý nepárny člen sa rovná $\frac{3}{4}$ násobku predchádzajúceho párneho člena. Párne členy tvoria geometrický rad $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...=1$ a nepárne členy $\frac{3}{4}*\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...\right)=\frac{3}{4}$, čiže súčet radu je $1+\frac{3}{4}=\frac{7}{4}$.

3 Nekonečné rady v novovekej Európe

V novoveku matematici pokročili v sčítavaní radov ale okrem konkrétnych číselných radov sa zaoberali aj radmi, pomocou ktorých je možné vyjadriť nejakú funkciu. To vyvrcholilo tým, že boli schopní rozviesť do radu, alebo radov skoro každú funkciu pomocou Newtonovej binomickej formule, pomocou Taylorovho radu a pomocou Fourierovho rozvoja. Zaoberali sa aj dôležitou otázkou konvergencie radov a objavili rôzne kritériá konvergencie a podarilo sa im zadefinovať jednotlivé pojmy súvisiace s radmi ako je napríklad súčet radu, alebo konvergentný a divergentný rad.

3.1 Vznik teórie radov

Teória nekonečných radov vzniká v 17. storočí spolu s diferenciálnym a integrálnym počtom. Prvé príklady výpočtu súčtu nekonečných radov v tomto období boli získané postupným integrovaním geometrického radu a pochádzajú od Nicolausa Mercatora a Jamesa Gregoryho.

3. 1. 1 Nicolaus Mercator (1620 - 1687)

Nicolaus Mercator sa v skutočnosti volal Niklas Kauffman. Narodil sa v Dánsku. V roku 1632 študoval na Universite v Rostocku. Zaoberal sa aj sférickou trigonometriou, geografiou a astronómiou. Žil veľa rokov v Londýne a bol jeden z prvých členov Royal Society. V roku 1668 vydal svoju prácu *Logarithmotechnia*, v ktorej sa zaoberá logaritmom. V roku 1683 odišiel do Francúzka a navrhoval fontány vo Versailles. Zomrel v Praíži.

Mercator vyjadril logaritmus ako nekonečný rad v práci *Logarithmotechnia*. Vychádzal pritom z geometrického radu

$$\frac{1}{1+q} = 1 - q + q^2 - q^3 + q^4 - q^5 + q^6 - + \dots$$

Túto rovnosť integroval

$$\int_0^x \frac{1}{1+q}\,dq = \int_0^x (1 - q + q^2 - q^3 + q^4 - q^5 + q^6 - + \dots)\,dq$$

pričom už vedel, že integrál z ľavej strany je funkcia ln(1+*x*). Takto dospel k radu:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} - + \dots$$

ktorý sa nazýva ***Mercatorovým radom***. Tento rad je ale na výpočet presnej hodnoty logaritmu nepraktický, pretože je potrebné sčítať veľký počet členov na dostatočnú presnosť, ináč povedané, má veľmi pomalú konvergenciu. Tento výsledok je uvedený v práci, ktorá pojednáva o logaritme a nie o nekonečných radoch, takže pravdepodobne vzišiel z potreby nejakým spôsobom vyjadriť logaritmus.

3.1.2 James Gregory (1638 - 1675)

Škótsky matematik. Matematiku ho najprv učila jeho matka. Ďalej študoval na Marischal College v Aberdeen optiku a konštrukciu teleskopov. Napísal knihu *Optica Promota.* V roku 1663 odišiel do Londýna, kde chcel vydať svoju prácu a hľadal niekoho, kto by podľa jeho knihy zakonštruoval teleskop. V 1664 odišiel do Talianska.

James Gregory našiel rad na výpočet hodnôt funkcie arctg(x). Jeho postup je podobný ako v prípade Mercatora. Vychádzal z radu

$$\frac{1}{1+q^2} = 1-q^2+q^4-q^6+q^8-q^{10}+q^{12}-+\ldots$$

rovnosť zintegroval

$$\int_0^x \frac{1}{1+q^2}dq = \int_0^x (1-q^2+q^4-q^6+q^8-q^{10}+q^{12}-+\ldots)dq$$

a využitím poznatku, že plocha pod krivkou $\frac{1}{1+q^2}$ na intervale $(0, x)$ je rovná arctg(x), dostal vyjadrenie tejto funkcie pomocou radu

$$\mathrm{arctg}(x) = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}-\frac{x^{11}}{11}+\frac{x^{13}}{13}-+\ldots$$

ktorý sa nazýva ***Gregoryho radom***. Tento rad má tiež veľmi pomalú konvergenciu.

3.1.3 Isaac Newton (1643 - 1727)

Anglický matematik, fyzik, optik a filozof. V rokoch 1661-1665 študoval na Cambridgi na slávnej Trinity Collage. Dôkladne sa zoznámil s Euklidovými Základmi, s dielom Keplera, Descarta, Galileiho a iných. Veľký vplyv na neho mal jeho učiteľ I. Barrow. V rokoch 1665-1666 sa Newton uchýlil do rodného mesta Woolsthropu, kde rozpracovával rad ideí. Pripravoval svoju optiku, gravitačnú teóriu, klasickú mechaniku, diferenciálny a integrálny počet (ktorú nazval „metóda *fluxí*“) a pritom sa venoval i svojej celoživotnej záľube alchýmii. V ďalších rokoch bol vedúcim katedry v Cambridgi, bol zvolený členom Kráľovskej spoločnosti náuk, bol členom parlamentu a bol povýšený do šľachtického stavu. Jeho hlavnou zásluhou v matematike je že s Leibnizom, ale nezávisle od neho, vybudoval diferenciálny a integrálny počet. Newton chápal matematiku ako nástroj fyzikálneho poznávania sveta. V algebre vybudoval metódu numerického riešenia algebraických rovníc (Newtonova metóda). Dôležité vety odvodil o symetrických funkciách koreňov algebraických rovníc. V práci *Philosophiae naturalis principia matematica* (Matematické základy prírodovedy, 1687) popísal rozvinutú teóriu kužeľosečiek, dôležitú pre nebeskú mechaniku. Práca *Výpočet kriviek tretieho rádu* (1704) zohrala dôležitú rolu v rozvoji analytickej a projektívnej geometrie.

Newton objavil takzvanú ***Newtonovu binomickú formulu***, ktorá má tvar:

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \ldots + \binom{\alpha}{n} x^n + \ldots$$

V rovnosti je α ľubovoľné reálne číslo a $\binom{\alpha}{k} = \dfrac{\alpha.(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{1.2.\ldots.k}$ je zovšeobecnený binomický koeficient. Ide teda o ďalšie vyjadrenie funkcie pomocou radu, tentokrát aj s parametrom α. Keďže α je ľubovoľné reálne číslo definuje predpis nekonečne veľa funkcií.

Ďalší Newtonov prínos do teórie radov je využitie ***metódy obrátenia radov***. Túto metódu využil na odvodenie radu pre sin(x). Vychádzal z radu pre arkus sínus

$$\arcsin(x) = x + \frac{1}{2}.\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}.\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{x^7}{7} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}.\frac{x^9}{9} + \ldots$$

ktorý môžeme prepísať do tvaru s neznámou *z*

$$z = x + \frac{1}{2}.\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}.\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{x^7}{7} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}.\frac{x^9}{9} + \ldots$$

Newton chcel nájsť vyjadrenie x pomocou z. Pritom, aby nemal príliš zložité formule, rozhodol sa od začiatku počítať s určitou presnosťou, napríklad len prvé štyri členy radu. V prvom kroku zanedbal všetky členy vyššieho rádu a dostal prvé priblíženie v tvare $x \doteq z$. V druhom kroku položil $x \doteq z + p$ a dosadil do výrazu pozostávajúceho z prvých štyroch členov radu

$$z = (z+p) + \frac{1}{2}.\frac{(z+p)^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}.\frac{(z+p)^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{(z+p)^7}{7}$$

Odtiaľto roznásobením dostal

$$\left(\frac{1}{2.3}z^3 + \frac{1.3}{2.4.5}z^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}z^7\right) + p\left(1 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1.3}{2.4}z^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}z^6\right) + p^2\left(\frac{1}{2}z + \frac{1.3}{4}z^3 + \frac{1.3.5}{2.4.2}z^5\right) + \ldots = 0$$

Keď v tomto vyjadrení zanedbal vyššie mocniny veličiny *p*, dostal hodnotu

$$p = -\frac{1}{2.3}z^3$$

čo znamená, že v príslušnom rozvoji sú prvé dva členy

$$x = z - \frac{1}{2.3}z^3$$

V treťom kroku Newton položil $p = -\frac{1}{2.3}z^3 + q$. Keď toto vyjadrenie dosadil do predošlého vzťahu, dostal

$$\left(\frac{1}{2.3}z^3 + \frac{1.3}{2.4.5}z^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}z^7\right) + \left[-\frac{1}{2.3}z^3 + q\right]\left(1 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1.3}{2.4}z^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}z^6\right) +$$

$$+\left[-\frac{1}{2.3}z^3 + q\right]^2\left(\frac{1}{2}z + \frac{1.3}{4}z^3 + \frac{1.3.5}{2.4.2}z^5\right) + \ldots = 0$$

Roznásobením a opätovným zanedbaním vyšších mocnín takto dostal ďalší člen radu pre sínus. Týmto postupom dostal rad pre sínus s presnosťou do siedmej mocniny v tvare

$$x = \sin(z) = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{5040}z^7$$

Rad pre kosínus dostal zo vzťahu $\cos(z) = \sqrt{1 - \sin^2(z)}$ keď do binomickej formule

$$\sqrt{1 - x^2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \ldots$$

dosadil vyjadrenie pre sínus a vzniknutý výraz upravil. Vyšlo mu

$$\cos(z) = 1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{24}z^4 - \frac{1}{720}z^6 \quad .$$

Po vykonaní uvedených výpočtov si Newton nakoniec všimol zákonitosť tvorby koeficientov, a tak „uhádol“ nekonečné rozvoje goniometrických funkcií

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}$$

Newton prišiel na to, že ***s nekonečnými radmi možno počítať podobne, ako s číslami***. Rady možno sčítať, odčítať, násobiť, deliť, umocňovať a odmocňovať. Počítanie s nekonečnými radmi má rovnakú vnútornú konzistentnosť a podlieha tým istým všeobecným pravidlám ako algebra konečných veličín.

Newton ďalej zistil, že s nekonečnými radmi sa dá narábať v mnohých smeroch ako s konečnými polynomiálnymi výrazmi. Dôkazom o tom, že je to tak, bolo pre neho to, keď získal ten istý nekonečný rad odmocnením $1 - x^2$ tradičnými algebraickými úpravami a overil výsledok vynásobením nekonečného radu sebou samým aby dostal znovu $1 - x^2$.

3.1.4 Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716)

Nemecký matematik, fyzik, právnik, historik, jazykovedec, diplomat, vynálezca a polyhistor, zakladateľ modernej matematickej analýzy. Narodil sa v Lipsku. Jeho otec bol profesorom etiky. Gottfried od útleho veku študoval spisy z otcovej rozsiahlej knižnice. V 12tich rokoch vedel dokonale latinsky, v 15tich rokoch študoval na univerzite a čítal Descartove spisy. Na lipskej univerzite študoval práva a filozofiu, súčasne však aj na univerzite v Jene matematiku. Vynašiel počítací stroj, na ktorom sa dalo aj násobiť a deliť. V roku 1676 sa stáva právnikom, historiografom a knihovníkom v Hannoveri. Bol jedným zo zakladateľov berlínskej *Akadémie* (1700) a stal sa jej prvým prezidentom. Podieľal sa tiež na zriaďovaní akadémie v Lipsku, Viedni, a Petrohrade. Jeho hlavnými matematickými prácami sú priekopnícke diela z diferenciálneho a integrálneho počtu (v jeho pôvodnej terminológii to bol sumatorný počet). Leibniz definoval deriváciu a integrál, odvodil základné vzorce derivovania, popísal vzťah derivovania a integrovania. Vybudoval základy teórie nekonečných radov a teórie diferenciálnych rovníc. Od neho pochádzajú pojmy ako *funkcia, diferenciál, diferenciálna rovnica, algoritmus*. Leibniz významne prispel k rozvoju logiky. Je možné ho pokladať za zakladateľa logicizmu. Leibniz je zakladateľom významnej matematickej školy, do ktorej je možné počítať napríklad Johanna I. Bernoulliho, l´Hospitala, Eulera a ďalších.

Významný matematik a fyzik a astronóm Christiaan Huygens položil Leibnizovi problém nájsť sumu radu s členmi tvaru $\frac{2}{n(n+1)}$. Leibniz prepísal každý člen ako rozdiel dvoch zlomkov:

$$\frac{2}{n(n+1)} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

po vypísaní zopár členov radu

$$2\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + 2\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \ldots$$

je vidieť, že pôvodný problém sa dá prepísať na súčet radu, ktorý má takéto členy:

$$2\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}\right)$$

Odtiaľ vidíme, že súčet nekonečného radu je 2.

Z tohto úspechu sa domnieval, že bude schopný vyrátať súčet skoro každého radu. Zostavil takzvaný harmonický trojuholník, ktorý je analógiou Pascalovho trojuholníka a z ktorého je možné vyčítať súčty niektorých radov.

Aritmetický trojuholník

$$\begin{array}{lllllll}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\ldots \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\ldots & \\
1 & 3 & 6 & 10 & 15\ldots & & \\
1 & 4 & 10 & 20\ldots & & & \\
1 & 5 & 15\ldots & & & & \\
1 & 6\ldots & & & & & \\
1\ldots & & & & & &
\end{array}$$

Harmonický trojuholník

$$\begin{array}{lllllll}
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \ldots \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{20} & \frac{1}{30} & \ldots & \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{12} & \frac{1}{30} & \frac{1}{60} & \ldots & & \\
\frac{1}{4} & \frac{1}{20} & \frac{1}{60} & \ldots & & & \\
\frac{1}{5} & \frac{1}{30} & \ldots & & & & \\
\frac{1}{6} & \ldots & & & & &
\end{array}$$

V aritmetickom trojuholníku je každý člen (mimo prvý stĺpec) rozdielom dvoch členov. Člena priamo pod ním a člena vľavo. V harmonickom rade každý člen (s výnimkou prvého radu) je rozdielom člena nad ním a člena vpravo. Ďalej v aritmetickom trojuholníku každý člen (nie v prvom stĺpci) je sumou všetkých členov o riadok vyššie a vľavo a v harmonickom rade je každý člen sumou členov v riadku o jedno nižšie a doprava. A keďže týchto členov je nekonečne veľa ide o sčítavanie nekonečného radu. Rad v prvom riadku je harmonický rad, ktorý diverguje. V ostatných riadkoch rady konvergujú. Čísla v druhom riadku sú polovicou obrátených hodnôt trojuholníkových čísel a Leibniz vedel, že súčet týchto čísel je 1. Čísla v treťom riadku sú jednou tretinou obrátených hodnôt pyramidálnych čísel

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}$$

a podľa harmonického trojuholníka je súčet týchto čísel $\frac{1}{2}$.

3.2 Rozvoj teórie radov

Po nájdení súčtov niektorých základných radov sa snahy matematikov osemnásteho storočia uberali smerom k rozpracovaniu ucelenej teórie nekonečných radov ako systematického nástroja, ktorý možno použiť všade tam, kde je potrebné aproximovať určité veličiny či funkcie. V tomto období sa o rozvoj teórie radov zaslúžili matematici ako Jacob Bernoulli, Leonard Euler či Brook Taylor.

3.2.1 Jacob Bernulli (1654 - 1705)

Vyštudoval filozofiu na Bazilejskej univerzite. V roku 1671 začal sám študovať matematiku a rozhodol sa, že sa jej bude plne venovať. Zaoberal sa diferenciálnymi rovnicami a napísal prvú učebnicu pravdepodobnosti. *Ars conjectandi.* Od roku 1687 až do smrti bol profesorom matematiky na Bazilejskej univerzite. V rokoch 1689 až 1704 napísal 5 prác o radoch, ktoré vyšli pod názvom *Aritmetické vety o nekonečných radoch a ich konečný súčet*. V úvode tejto knihy vyslovuje nasledujúce tri axiómy, ktoré sú základom manipulácie s radmi:

1. axióm: Každú veličinu je možné rozdeliť na časti, ktoré sú menšie ako ona sama.

2. axióm: Ku každej konečnej veličine ja možné zvoliť väčšiu veličinu.

3. axióm: Ak odoberieme od základnej veličiny to čo zostane, keď odoberieme od základnej veličiny istú časť, tak nám zostane práve len táto časť.

Aby to bolo zrozumiteľnejšie môžeme túto slovnú formuláciu prepísať do symbolickej formy:

$$A-(A-B)=(A-A)+B=B$$

V prvom diele tejto práce našiel súčet radov $\sum_{n=1}^{\infty} n2^{-n}, \sum_{n=1}^{\infty} n^2 2^{-n}, \sum_{n=1}^{\infty} n^3 2^{-n}$. (XIV. veta)

Pozrime si ako napríklad vyjadril rad $\sum_{n=1}^{\infty} n2^{-n}$. Tento rad označil ako

$$A=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\dots .$$

Na vyjadrenie tohto radu použil rady, ktorých súčet už poznal

$$B=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots=1$$

$$C=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\dots=\frac{1}{2}$$

$$D=\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\dots=\frac{1}{4}$$

Tieto rady vertikálne sčítal a dostal pôvodný rad $A=B+C+D+\dots$, teda

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\dots=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots=2$$

Vo vete XV. na základe 3. axiómu počítal súčet radu. Zvolil si dva rady, ktorých súčet označil N a P.

$$N = \frac{a}{c} + \frac{a}{2c} + \frac{a}{3c} + \frac{a}{4c} + \ldots,$$

$$P = \frac{a}{2c} + \frac{a}{3c} + \frac{a}{4c} + \ldots = N - \frac{a}{c}.$$

Rad P je možné získať z radu *N* odčítaním $\frac{a}{c}$. Po vertikálnom odčítaní člena po člene radu P od radu N získal rad

$$Q = \frac{a}{2c} + \frac{a}{6c} + \frac{a}{12c} + \frac{a}{20c} + \frac{a}{30c} + \ldots = \frac{a}{c}$$

ktorého súčet je $\frac{a}{c}$, pretože $P - N = \frac{a}{c}$. Tento rad vynásobil dvojkou a získal rad:

$$R = \frac{a}{c} + \frac{a}{3c} + \frac{a}{6c} + \frac{a}{10c} + \frac{a}{15c} + \ldots = \frac{2a}{c}.$$

Tento výsledok často používal napr. pre súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty}(n(n+1))^{-1}$, ktorý získal z radu *Q* voľbou *a=c=1*, a jeho súčet je teda $\sum_{n=1}^{\infty}(n(n+1))^{-1} = 1$. Bol si pravdepodobne vedomý nepresnosti svojich manipulácií. Podobnou manipuláciou s iným radom totiž odvodil

$$\frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \ldots = A$$

$$\frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \frac{6}{5} + \ldots = A - 2$$

Po vertikálnom odčítaní týchto radov získal iný a nesprávny výsledok

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots = 2.$$

Mal teda dva súčty pre ten istý rad. Všimol si však to, že v prípade pre rad *N* a voľbou *a=c=1* platí $N = n^{-1} \to 0$ a v druhom prípade pre rad *A* platí: $A = (n+1)n^{-1} \to 1 \neq 0$. Uvedomil si dokonca, že pre možnosť užívania radu pre túto manipuláciu je práve podmienka $a_n \to 0$ veľmi podstatná, tým sa dostal veľmi blízko k nutnej konvergencii radu.

Vo vete XVI. dokazuje, že harmonický rad

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

má nekonečný súčet. Divergenciu harmonického radu ako prvý v dejinách dokázal Nicole Oresme. Jacob Bernoulli tu konštatuje, že ako prvý to dokázal jeho brat Johann, ale podáva dva ďalšie dôkazy. Zdá sa že počítanie s radmi bolo pre tohto matematika vecou nadšenia a nie praktickou záležitosťou, pretože keď je už raz niečo dokázané z praktického hľadiska to nie je dôležité dokázať inými spôsobmi spôsobmi.

V prvom dôkaze (veta XXIV.) uvažoval rady, ktorých súčty poznal:

$$A = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 2$$
$$B = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \dots = 2.\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$
$$C = \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{40} + \dots = 2.\frac{1}{5} = \frac{2}{5}$$
$$D = \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28} + \frac{1}{56} + \dots = 2.\frac{1}{7} = \frac{2}{7}$$
$$\dots$$

Súčty týchto radov sčítal a dostal, že

$$A + B + C + D + \dots = \frac{2}{1} + \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \frac{2}{7} + \dots = 2\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots\right).$$

Tento výsledok dal do rovnosti so súčtom jednotlivých členov radu. Tento súčet je súčtom členov harmonického radu, pretože tak sú tieto rady zvolené. Dostal že

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots\right)$$

a po vynásobení pravej strany jednou polovicou dostal rovnosť

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots.$$

Porovnal jednotlivé členy na pravej a ľavej strane

$$\frac{1}{1} > \frac{1}{2}, \frac{1}{3} > \frac{1}{4}, \frac{1}{5} > \frac{1}{6}, \dots,$$

a porovnal súčty jednotlivých radov

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots < \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots$$

Toto komentoval nasledovne: "tieto dva výsledky môžu byť splnené zároveň len keď majú obidva rady nekonečný súčet a teda má nekonečný súčet aj celý harmonický rad"

Druhý dôkaz divergencie harmonického radu nachádzame vo vete XVI. Uvažoval $n^2 - n$ členov nasledujúcich za $\frac{1}{n}$:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n^2},$$

k čomu dodal, že každý sčítanec tohto súčtu je väčší alebo rovný ako člen $\frac{1}{n^2}$:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n^2}>(n^2-n)\frac{1}{n^2}.$$

Po roznásobení pravej strany dostaneme nerovnicu

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n^2}>1-\frac{1}{n}.$$

Ak k danej nerovnosti pričítame $\frac{1}{n}$ získavame nerovnicu:

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n^2}>1.$$

Získaný vzťah komentuje takto: “Môžeme teda preskupiť členy radu do skupín tak, že každá skupina má súčet väčší ako ľubovolné číslo, a teda je rad nekonečný.“

Pri štúdiu radov si všimol ďalšie dva poznatky a to, že nie len harmonický rad $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$ má nekonečný súčet, ale napríklad aj jeho násobok.:

$$\frac{1}{1000}+\frac{1}{2000}+\frac{1}{3000}+\frac{1}{4000}+\ldots,$$

ktorý má jednotlivé členy tisíckrát menšie, bude mať nekonečný súčet, lebo tisícina nekonečna je tiež nekonečno. Spravil z toho záver že $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ je len nutná podmienka konvergencie.

Vo vete XXIV. odvodil takýto vzorec:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^m}:\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^m}=(2^m-1):1.$$

Získal ho nasledujúcim spôsobom. Zobral dva rady

$$x=\frac{1}{1^m}+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{4^m}+\ldots,$$
$$y=\frac{1}{1^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{5^m}+\frac{1}{7^m}+\ldots.$$

pomocou ktorých je možné vyjadriť hľadaný výraz $y:(x-y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^m}:\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^m}$ a po ich vertikálnom odčítaní získal rad

$$x-y=\frac{1}{2^m}+\frac{1}{4^m}+\frac{1}{6^m}+\frac{1}{8^m}+\ldots$$

.

ktorý je upravil vynásobením 2^m a dostal rad x

$$(x-y)2^m = \frac{1}{1^m} + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} + \frac{1}{5^m} + \frac{1}{6^m} + \frac{1}{7^m} + \frac{1}{8^m} + \ldots = x$$

Z rovnosti vyplýva že $(x-y) = \frac{x}{2^m}$ čo vyžil pri úprave výrazu $y:(x-y)$, a dostal výsledok ktorý hľadal

$$y:(x-y) = \left(x - \frac{x}{2^m}\right) : \frac{x}{2^m} = \left(1 - \frac{1}{2^m}\right) : \frac{1}{2^m} = (2^m - 1):1.$$

Jeho úprava je správna len v prípade, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-m}$ je konvergentný, teda pre $m > 1$. Odvodený vzorec však požíval aj pre $0 < m < 1$ a došiel k paradoxom.

V treťom diele (z roku 1696) odvodil rozvoj výrazu $\frac{l}{m-n}$ do radu na základe opakovaného delenia

$$\frac{l}{m-n} = \frac{l}{m} + \frac{l.n}{m^2} + \frac{l.n^2}{m^3} + \frac{l.n^3}{m^4} + \ldots . (1)$$

Dosadil –n za n:

$$\frac{l}{m+n} = \frac{l}{m} - \frac{l.n}{m^2} + \frac{l.n^2}{m^3} - \frac{l.n^3}{m^4} + \ldots . (2)$$

Voľbou n = m získal

$$\frac{l}{2m} = \frac{l}{m} - \frac{l}{m} + \frac{l}{m} - \frac{l}{m} + \ldots,$$

čo považoval za paradox. Je zrejmé, že tento paradox tu vzniká preto, že vzťahy (1) a (2) platia len pre $n < m$, teda nie pre $n = m$. Pre $n = m$ vo vzťahu (1) ide o delenie nulou.

Vo vete XXI. odvodil vzorec:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Označil rady, pomocou ktorých chcel odvodiť daný vzorec:

$$A = \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots,$$

$$B = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{1.2.3.4.5} + \ldots = A - 1.$$

Ich vertikálnym odčítaním získal ďalší rad C

$$C = A - B = \frac{1}{1.2} + \frac{2}{1.2.3} + \frac{3}{1.2.3.4} + \frac{4}{1.2.3.4.5} + \ldots = 1,$$

Z tohto radu odvodil rady D, E, F vynechaním prvých členov radu C

$$C = \frac{1}{1.2} + \frac{2}{1.2.3} + \frac{3}{1.2.3.4} + \frac{4}{1.2.3.4.5} + \ldots = 1,$$

$$D = \frac{2}{1.2.3} + \frac{3}{1.2.3.4} + \frac{4}{1.2.3.4.5} + \ldots = C - \frac{1}{1.2} = \frac{1}{1.2},$$

$$E = \frac{3}{1.2.3.4} + \frac{4}{1.2.3.4.5} + \ldots = D - \frac{2}{1.2.3} = \frac{1}{1.2.3},$$

$$F = \frac{4}{1.2.3.4.5} + \ldots = E - \frac{3}{1.2.3.4} = \frac{1}{1.2.3.4}.$$

a vertikálnym sčítaním týchto radov dosiahol hľadaný vzorec:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)!} = \frac{1}{1.2} + \frac{4}{1.2.3} + \frac{9}{1.2.3.4} + \frac{16}{1.2.3.4.5} + \ldots = \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots = .\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

3.2.2 Abraham de Moivre (1667 - 1754)

Anglický matematik. Narodil sa vo Francúzku, študoval na Sorbonne. V rokoch 1685 – 1688 bol ako protestant väznený. Potom emigroval do Anglicka. Bol priateľom I. Newtona. Zaoberal sa teóriou radov, teóriou pravdepodobnosti, komplexnými číslami. Objavil súvislosť medzi rekurentnými formulami a diferenčnými rovnicami. Sformuloval pravidlo pre násobenie, umocňovanie a odmocňovanie komplexných čísel (*Moivrova veta*).

Fibinacci objavil postupnosť, ktorá nesie jeho meno (*Fibonacciho postupnosť*). Je to postupnosť prirodzených čísel, v ktorej každý člen je súčtom dvoch predchádzajúcich:

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

Moivre objavil formulu na vyjadrenie *n*-tého člena tejto postupnosti použitím nekonečných radov, metódou generujúcej funkcie. Je technickou konvenciou, že $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ a ďalšie členy sú definované ako:

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad \text{pre } n \geq 0.$$

Generujúca funkcia pre Fibonacciho postupnosť je:

$$f(x) = F_0 + F_1 x + F_2 x^2 + F_3 x^3 + \ldots.$$

Keď túto funkciu prenásobíme s x dostaneme:

$$xf(x) = F_0 x + F_1 x^2 + F_2 x^3 + \ldots,$$

$$x^2 f(x) = \phantom{F_0 x + {}} F_0 x^2 + F_1 x^3 + \ldots.$$

Po odčítaní dvoch vzniknutých výrazov od pôvodnej funkcie dostávame:

$$f(x) - xf(x) - x^2 f(x) = F_0 + F_1 x - F_0 x + (F_2 - F_1 - F_0)x^2 + (F_3 - F_2 - F_1)x^3 + \ldots,$$

z čoho plynie:

$$f(x)\left(1-x-x^2\right)=F_0+F_1x-F_0x=x,$$

pretože všetky koeficienty tvaru $F_{n+2}-F_{n+1}-F_n=0$ z definície členov postupnosti. Funkciu môžeme zapísať v tvare:

$$f(x)=\frac{x}{1-x-x^2}.$$

Použitím koreňov $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}=\frac{2}{1\pm\sqrt{5}}$ rovnice $1-x-x^2=0$ dostávame:

$$f(x)=\frac{x}{\left[1-\left(\left(1+\sqrt{5}\right)/2\right)x\right]\left[1-\left(\left(1-\sqrt{5}\right)/2\right)x\right]}.$$

Rozdelením na parciálne zlomky dostaneme:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1}{1-\left(\left(1+\sqrt{5}\right)/2\right)x}-\frac{1}{1-\left(\left(1-\sqrt{5}\right)/2\right)x}\right].$$

Vyjadríme výrazy v zátvorke ako geometrické rady:

$$\frac{1}{1-\left(\left(1+\sqrt{5}\right)/2\right)x}=1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}x+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2x^2+\ldots,$$
$$\frac{1}{1-\left(\left(1-\sqrt{5}\right)/2\right)x}=1+\frac{1-\sqrt{5}}{2}x+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2x^2+\ldots.$$

Dosadíme do predchádzajúceho výrazu:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]x+\ldots+\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]x^n+\ldots.$$

Keď to porovnáme s definíciou $f(x)=F_0+F_1x+F_2x^2+F_3x^3+\ldots$, tak nám z toho vyplynie výraz pre *n*-tý člen Fibonacciho postupnosti:

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]x^n.$$

Zvláštne je, že členy postupnosti sú prirodzené čísla a výraz pre n-tý člen postupnosti obsahuje v sebe iracionálne číslo $\sqrt{5}$.

3.2.3 Johann Bernoulli (1667 - 1748)

Stal sa lekárom a matematikom. Pod vedením Jacoba preštudoval v rokoch 1685 – 1687 vtedajšiu matematickú literatúru. V roku 1691 odišiel do Paríža, kde sa zoznámil s L ´Hospitalom s ktorým spolupracoval. Vydal dve učebnice. Roku 1694 získal titul doktor medicíny na základe dizertačnej práce *O pohybu svalov,* ktorá bola skôr matematická, pretože pohyb svalov je riešený na základe „analýzy nekonečne malých veličín“. Po smrti svojho brata Jacoba zaujal jeho miesto na katedre matematiky v Bazileji. Veľký význam Johanna je v tom, že podal prvý systematický výklad diferenciálneho a integrálneho počtu. Našiel tiež nové metódy riešenia obyčajných diferenciálnych rovníc a ako prvý formuloval a riešil úlohy s geodetickými krivkami. Jeho podstatné výsledky v oblasti číselných radov sú úzko spojené s výsledkami jeho brata Jacoba.

Johann dokázal ***divergenciu harmonického radu*** takto: Vertikálnym súčtom nesledujúcich radov

$$\frac{1}{1*2}+\frac{1}{2*3}+\frac{1}{3*4}+\frac{1}{4*5}...=1$$

$$\frac{1}{2*3}+\frac{1}{3*4}+\frac{1}{4*5}+...=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3*4}+\frac{1}{4*5}+...=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{4*5}+...=\frac{1}{3}-\frac{1}{12}=\frac{1}{4}$$

dostal rovnicu

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}...=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}...$$

v ktorej je rad na ľavo o 1 menší ako rad napravo z čoho pravdepodobne usúdil že je to možné len ak má harmonický rad nekonečný súčet.

3.2.4 Guido Grandi (1671 - 1742)

Bol taliansky kňaz, filozof, matematik a inžinier. Vyštudoval za jezuitu a stal sa členom Kamaldulovského rádu. Ďalej sa stal profesorom filozofie vo Florencii v 1700 a profesorom matematiky v roku 1714. V matematike študoval krivky a rady. V roku 1709 sa stal členom *Royal Society*.

Grandi skúmal rad $1-1+1-1+...+\left(-1\right)^{n+1}+...=S,$ potom od neho odčítal 1 $S-1=1+1-1+...+\left(-1\right)^{n}+...$. Usúdil, že $S-1=-S,$ odkiaľ vyjadril $S=\frac{1}{2}$. Hľadaný súčet vypočítal ešte iným spôsobom a to tak, že si vytvoril dvojice sčítancov takto:

$(1-1)+(1-1)+\ldots=S$, odtiaľ dostal, že $S=0$. Vyšla mu rovnosť $\frac{1}{2}=0$. Jeho úvaha je chybná v tom, že rátal s radom, ktorý nie je konvergentný, preto nemá súčet. A pri sčítavaní radu použil asociatívny zákon, ktorý je možné aplikovať len na súčty konvergentných radov alebo na rady s konečným počtom členov v prípade, že chceme získať správny výsledok. Získaný výsledok $\frac{1}{2}=0$ Grandi vyložil ako symbol stvorenia sveta Bohom z ničoho. To vyvolalo búrlivú polemiku, ktorej sa okrem Grandiho zúčastnil Leibniz, Niclaus Bernoulli a iní učenci. V týchto diskusiách sa upresňovali pojmy: súčet nekonečného číselného radu, konvergencie a divergencie týchto radov.

3.2.5 Brook Taylor (1685-1731)

Taylor bol Anglický matematik, ktorý je známy hlavne vďaka objavu Taylorovho radu. Študoval v Cambridge na St. College. Bol členom *Royal Society*. Prispeli k rozvoju nového odboru matematiky ktorý sa zaoberal konečnými diferenciami dielom *Methodus Incrementorum Directa et Inversa*, ktoré vyšlo v roku 1715. V tom istom roku vydal svoje dielo *Linear Perspective*, ktoré sa zaoberá lineárnou perspektívou a v roku 1719 vylepšenú verziu *New Principles of Linear Perspective*. Zaoberal sa aj filozofiou a náboženstvom.

Jeho veľkým prínosom do matematiky je objavenie univerzálneho vzorca, pomocou ktorého je možné rozviesť funkciu do nekonečného radu. Tento vzorec sa nazýva ***Taylorovým radom*** a má tvar:

$$f(x)=f(h)+\frac{f'(h)}{1!}(x-h)+\frac{f''(h)}{2!}(x-h)^2+\frac{f'''(h)}{3!}(x-h)^3+\ldots$$

Predpokladom rozvoja do tohto radu je existencia všetkých derivácií funkcie *f* v bode *h*. Ako príklad uvádzam rozvoj funkcie e^x pre $h=0$:

$$f(x)=e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\ldots.$$

3.2.6 Leonard Euler (1707 - 1783)

Je to jeden z najvýznamnejších svetových matematikov. Leonard Euler sa narodil v Bazileji v 1707. V 13tich rokoch Euler nastúpil na Univerzitu v Bazileji, ktorá bola centrom matematiky pod vedením Johanna Bernoulliho. Oficiálne študoval filozofiu a právo. Bernoulli poradil Eulerovi, aby študoval matematiku sám a cez soboty mu pomáhal so štúdiom. Po ukončení filozofie v roku 1723 nastúpil na odbor teológie. V roku 1727 Euler odišiel do St. Peterburgu. V roku 1733 sa stal profesorom matematiky a tiež prebral odbor geografie. V roku 1740 odišiel do Berlína. Stal sa riaditeľom matematickej sekcie a zostal v Berlína 25 rokov. Jeho najznámejšie práce z tohto obdobia sú: *Introduction in analysin infinitorum* (1748) a *Letters á une princesse d´Allemagne sur divers sujets de physique et de philosophie*. V roku 1766 sa vrátil do St. Peterburgu. Krátko po jeho príchode ochorel, následkom čoho prišiel o väčšinu svojho zraku a v roku 1771 oslepol úplne. Jeho *Algebra* (1770), nadiktovaná sluhovi, sa stala najúspešnejšia matematická kniha po Euklidových *Základoch*. Euler zomrel v roku 1783 v St. Peterburgu.

Euler vyjadril vzťah takzvanej ***zeta funkcie***, ktorá je definovaná:

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots$$

cez prvočísla:

$$\frac{1}{(1-1/2^s)}\frac{1}{(1-1/3^s)}\frac{1}{(1-1/5^s)}\frac{1}{(1-1/7^s)}\dots = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots \quad (1)$$

Členy na ľavej strane sú v tvare $(1-1/p_n^s)^{-1}$, kde p_n je n-té prvočíslo. Každý člen môžeme vyjadriť ako geometrický rad:

$$\frac{1}{(1-1/p_n^s)} = 1 + \frac{1}{p_n^{\ s}} + \frac{1}{p_n^{\ 2s}} + \frac{1}{p_n^{\ 3s}} + \dots$$

Vynásobením všetkých týchto radov dostaneme obrátenú hodnotu všetkých možných súčinov prvočísel s s-tou mocninou, pričom každé sa bude vyskytovať práve raz. Každé prirodzené číslo ≥ 2 sa dá vyjadriť jednoznačne ako súčin prvočísel. Z toho plynie korektnosť rovnosti (1).

Eulerovi sa podarilo sčítať rad $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$. Vychádzal z takejto rovnice:

$$\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1 - \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{5!} - \frac{x^3}{7!} + \dots = 0 \quad (1)$$

Táto rovnica má korene: $x_1 = \pi^2$, $x_2 = (2\pi)^2$, $x_3 = (3\pi)^2$, ... ale nie 0, pretože $\sin\sqrt{x}/\sqrt{x} \to 1$ keď $x \to 0$. Ak polynomiálna rovnica

$$1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n = 0$$

má korene $x_1, x_2, x_3, \dots$, potom sa dá prepísať do tohto tvaru:

$$1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n = \left(1-\frac{x}{x_1}\right)\left(1-\frac{x}{x_2}\right)\dots\left(1-\frac{x}{x_n}\right)$$

tiež platí že

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\ldots+\frac{1}{x_n}=-a_1$$

keď tieto poznatky aplikujeme na rad (1) dostaneme:

$$\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{(2\pi)^2}+\frac{1}{(3\pi)^3}+\ldots=\frac{1}{6}$$

prenásobením tejto rovnosti π^2 dostaneme hľadaný súčet

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}.$$

Pomocou narábania s „nekonečne malými“ a „nekonečne veľkými“ číslami vyjadril Euler ***rad pre funkciu sínus***. Do známej Moivrovej formuly

$$(\cos\varepsilon+i\sin\varepsilon)^n=\cos n\varepsilon+i\sin n\varepsilon$$

dosadil n „nekonečne veľké“ a pre pevné x označil $\varepsilon=\frac{x}{n}$. Potom ε je „nekonečne malá“ veličina. Pomocou binomickej vety z daného výrazu dostal

$$\cos x+i\sin x=\cos n\varepsilon+i\sin n\varepsilon=(\cos\varepsilon+i\sin\varepsilon)^n=\sum_{k=0}^{n}(i)^k\binom{n}{k}\sin^k\varepsilon\cos^{n-k}\varepsilon$$

Keďže ε je nekonečne malá veličina, tak môžeme predpokladať $\cos\varepsilon=1$ a $\sin\varepsilon=\varepsilon$. Podobne n je nekonečne veľké číslo, teda $n=n-1=n-2=\ldots$. Takže imaginárnu časť poslednej rovnosti môžeme upraviť takto:

$$\sin x=\frac{n\varepsilon}{1}-\frac{n^3\varepsilon 3}{3!}+\ldots=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3!}+\ldots$$

Takto Euler získal dnes dobre známy rozvoj funkcie sínus do potenčného radu.

3.2.7 Joseph Fourier (1768-1830)

Bol francúzsky matematik a fyzik známy objavom Fourierovych radov a ich aplikáciou na problémy tepelných tokov. Po ňom je pomenovaná aj Fourierova transformácia. Narodil sa v Auxerre vo Francúzsku ako syn krajčíra a vzdelával sa u benediktínov. Vo vedeckých oddieloch armády prijal výuku matematiky. Zúčastnil sa Napoleonovej výpravy do Egypta. V roku 1822 zverejnil svoju prácu *Analytickú teóriu tepla*. Z matematiky sa zoberal aj rovnicami a vo fyzike objavil jav, ktorý sa v súčasnosti nazýva skleníkový efekt.

Fourier našiel spôsob ako rozložiť funkciu do trigonometrického radu. Tento rad sa potom nazýva ***Fourierov rad***. Ak chceme rozložiť funkciu f(x) do radu

$$f(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin(kx)$$

Tak jednotlivé koeficienty vyrátame na základe týchto formúl:

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x).\cos(kx)dx \qquad B_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x).\sin(kx)dx$$

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

Pomocou týchto vzorcov je možné funkciu rozložiť do trigonometrického radu. Tento rozvoj sa používa aj na riešenie diferenciálnych rovníc. Fourier uvádza ako jednu z ilustrácií rozkladu do Fourierovho radu nasledujúci príklad. Uvažujme funkciu

$$f(x) = \begin{cases} +1 & 0 < x < \pi \\ 0 & x = 0 \\ -1 & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

Skúsme tento príklad vyriešiť. Dosaďme do vyššie uvedených vzorcov aby sme vyrátali

jednotlivé koeficienty A_0, A_k, B_k:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^{0} (-1)dx + \int_{-\pi}^{0} (1)dx \right] = 0$$

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x).\cos(kx)dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{0} (-1).\cos(kx)dx + \int_{0}^{\pi} \cos(kx)dx \right] = \frac{1}{\pi} \left[\left[\frac{-\sin(kx)}{k} \right]_{-\pi}^{0} + \left[\frac{\sin(kx)}{k} \right]_{0}^{\pi} \right] = 0$$

$$B_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x).\sin(kx)dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{0} (-1).\sin(kx)dx + \int_{0}^{\pi} \sin(kx)dx \right] = \frac{1}{\pi} \left[\left[\frac{\cos(kx)}{k} \right]_{-\pi}^{0} + \left[\frac{-\cos(kx)}{k} \right]_{0}^{\pi} \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1-\cos(-k\pi)}{k} + \frac{1-\cos(k\pi)}{k} \right] = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1-\cos(k\pi)}{k} \right)$$

Čiže $A_0 = 0$, $A_k = 0$, $B_k = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1-\cos(k\pi)}{k} \right)$ tieto koeficienty dosaďme do vzorca pre funkciu:

$$f(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin(kx) = 0 + 0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \left(\frac{1-\cos(k\pi)}{k} \right) \sin(kx)$$

Pre nepárne k je výraz v zátvorke rovný $\frac{2}{k}$ a pre párne k je rovný 0. Výsledok možno zapísať

v tvare:

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left\{ \sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{5}\sin(5x) + \frac{1}{7}\sin(7x) + \dots \right\} .$$

Keď sa pozrieme na prvý člen radu tak môžeme povedať že danú funkciu aproximuje funkcia sínus. Sínus v bode π sa rovná 1 a v bode ($-\pi$) sa rovná -1, teda tak ako funkcia $f(x)$. V bode 0 má celý rozvoj hodnotu 0 a tá je rovná hodnote danej funkcie v tom istom bode.

3.3 Otázky konvergencie radov

Počas celého sedemnásteho a osemnásteho storočia bola otázka konvergencie nekonečných radov mimo záujmu matematikov. Matematici používali rady na praktické počítanie a preto rady, ktoré ich zaujímali, boli rýchlo konvergentné. Poznali síce zopár nekonvergentných radov, ale tie boli skôr akousi kuriozitou. Až na začiatku devätnásteho storočia sa otázka konvergencie nekonečných radov dostáva do centra záujmu matematikov.

3.3.1 Augustin Louis Cauchy (1789 - 1857)

Cauchy sa narodil v Paríži 21. augusta 1789. Roku 1805 postúpil na *Ecole Polytechnique* ktorú ukončil roku 1810 a stal sa inžinierom v obore „mostov a ciest“. Jeho prvou prácou z matematiky bola 1813 - *Recherches sur les polyédres* ktorá obsahuje známy dôkaz Eulerovej vety o mnohostenoch. V tom istom čase sa zaoberal aj otázkou riešenia algebraických rovníc pomocou radikálov ako aj otázkami teórie čísel. Cauchy bol jedným z najplodnejších matematikov, akí kedy žili. Popri 7 knihách uverejnil vyše 800 vedeckých prác. Cauchy sa stal členom parížskej Akadémie a profesorom na Ecole Polytechnique. Z jeho prednášok na EP vznikla, na podnet Laplacea a Poissona, jedno z Cauchyho najvplyvnejších diel
1821 - *Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique*
1823 - *Résume des lecons donnes a l'Ecole Royale Polytechnique sur le calcul infinitesimal*
1829 - *Lecons sur le calcul différentiel*
Cauchy sa vo svojom kurze podujal na vybudovanie matematickej analýzy na exaktných základoch. Za východisko si zvolil pojem limity. Z tohto obdobia sú významné aj Cauchyho práce venované teórii diferenciálnych rovníc. Cauchy zomrel 23 mája 1857.

Definoval súčet radu ako limitu postupnosti čiastočných súčtov. Teda tak ako to robíme dnes. Používal aj pojem divergetný rad. Uvádzam niektoré jeho definície:

> *„Postupnosť*“ je nekonečná následnosť veličín $u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots$, ktoré nasledujú za sebou podľa fixného pravidla. Tieto veličiny sú rozdielne členy postupnosti. Nech

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + ...u_{n-1}$$

je súčet prvých n členov postupnosti, kde *n* je prirodzené číslo. Ak súčet má konečnú limitu *s* pre *n* idúce do nekonečna, tak nazývame rad *konvergentný* a táto limita sa nazýva *súčet radu*. Ak naproti tomu čiastočný súčet s_n nemá žiadnu fixnú limitu pri rastúcom *n* tak rad nazývame *divergentný* a nemá žiaden súčet. Člen korešpondujúci indexu *n*, teda člen u_n, sa nazýva *hlavný člen*. Na to, aby bola postupnosť presne určená stačí, aby bol daný hlavný člen ako funkcia indexu *n.*" (Birkhoff 1973, s.3)

Aby ozrejmil jednotlivé pojmy uvádza príklad, jednu z najjednoduchších postupností a tou je geometrická postupnosť $1, x, x^2, x^3, ...$, ktorej hlavný člen je x^n. Sčítaním prvých *n* členov postupnosti dostávame:

$$1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)} - \frac{x^n}{(1-x)}.$$

výraz $\frac{x^n}{(1-x)}$ vzhľadom na veľkosť konverguje buď k nule s rastúcim *n*, alebo sa zväčšuje. Závisí to od toho, či je hodnota *x* väčšia, alebo menšia ako 1. Takže keď je hodnota *x* menšia ako 1 definuje postupnosť $1, x, x^2, x^3, ...$ rad konvergentný ktorého súčet je $\frac{1}{(1-x)}$ a v prípade že je hodnota *x* väčšia ako 1 definuje táto postupnosť rad divergentný.

V úvahách o konvergencii pokračuje. Majme rad:

$$u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n + u_{n+1} + ...$$

Ako nutnú a postačujúcu podmienku konvergencie tohto radu uvádza, že suma $s_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{n-1}$ musí konvergovať s rastúcim *n* k fixnej limite. Rozdiel sumy s_n a každej nasledujúcej sú určené nasledujúcimi rovnosťami:

$$s_{n+1} - s_n = u_n, s_{n+2} - s_n = u_n + u_{n+1}, s_{n+3} - s_n = u_n + u_{n+1} + u_{n+2}, ...$$

Na to, aby rad $u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n + u_{n+1} + ...$ konvergoval je nevyhnutné, aby sa hlavný člen u_n trvalo zmenšoval s rastúcim *n*. Táto podmienka ale nie je postačujúca, musí tiež platiť že od nejakého *n* sumy $u_n + u_{n+1}, u_n + u_{n+1} + u_{n+2}, ...$ majú nekonečne malú hodnotu.

Zo súčasnej matematiky poznáme Cauchyho kritérium. Dá sa zapísať takto: a) Ak existuje číslo $0 \leq q < 1$ také, že pre všetky *n* od istého začínajúc od istého $n_1 < n$ platí že $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$ potom rad $\sum_{n-1}^{\infty} a_n$ konverguje. b) Ak $\lim_{n->\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$ potom rad $\sum_{n-1}^{\infty} a_n$ konverguje.

3.3.2 Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855)

Nazývajú ho aj „knieža matematikov“. Narodil sa v Braunschweigu v roku 1777 a zomrel v Göttingene v roku 1855. Do školy nastúpil v roku 1784 a jeho učiteľ Büttner odhalil jeho talent a obstaral mu pokročilé knihy. Na strednú školu nastúpil v roku 1788 a v roku 1791 získal štipendium. Bol tiež vybraný do školy pre nadaných žiakov do Brunswick Collegium, kde študoval v rokoch 1792 – 1795. Gauss študoval diela Newtona, Eulera a Lagranga a začal svoj vlastný výskum, väčšinou numerické experimenty. V roku 1795 odišiel študovať do Göttingenu. Jeho úspech začal konštrukciou pravidelného 17-uholníka a vrcholil dôkazom základnej vety algebry. Gauss sa vrátil do Brunswicku v roku 1798 a žil tam až do roku 1807. Publikoval jeho prácu z teórie čísel *Disquisitiones arithmeticae* v roku 1801. V tom istom roku v oblasti astronómie predpovedal pozíciu asteroidu Ceres. V roku 1807 sa stal riaditeľom observatória v Göttingene. V roku 1830 spolupracoval s mladým fyzikom Wilhelmom Weberom na prieskumu magnetizmu a spolu prednášali teóriu a prax elektrického telegrafu. V ďalších rokoch mal Gauss študentov Eisensteina a Dedekina

Gauss definoval hypergeometrickú funkciu vo svojej práci *Disquisitiones generales circa superficies* z roku 1828 na jednotkovom kruhu $|z| < 1$ komplexnej roviny ako ***hypergeometrický rad***:

$$F(\alpha, \beta, \gamma; z) = 1 + \frac{\alpha.\beta}{1.\gamma} z + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)} z^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.3.\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} z^3 \dots.$$

A takto ho analyzoval: Táto funkcia je funkciou štyroch premenných α, β, γ, z. Premennú α je možné zameniť za premennú β a platí že $F(\alpha, \beta, \gamma; z) = F(\beta, \alpha, \gamma; z)$. Pre fixné hodnoty elementov α, β, γ sa stáva náš rad funkciou jednej premennej *z*. Tento rad končí $(1-\alpha)$-tým členom keď $(\alpha - 1)$ alebo $(\beta - 1)$ je záporné celé číslo (α a β je možné vymeniť), pretože v zlomku sa ocitne člen $(\alpha - 1 + (1-\alpha)) = 0$, ktorý všetky nasledujúce členy vynuluje . V tomto prípade rad predstavuje polynóm („racionálnu algebraickú funkciu“).

Podiel koeficientov mocnín z^m a z^{m+1} bude:

$$\frac{(m+1)(\gamma+m)}{(\alpha+m)(\beta+m)}=\frac{m^2+m\gamma+\gamma+m}{m^2+m\alpha+m\beta+\alpha\beta}=\frac{1+(\gamma+1)/m+\gamma/m^2}{1+(\alpha+\beta)/m+\alpha\beta/m^2}.$$

tento podiel konverguje s rastúcim m k 1. Ak je z fixnou hodnotou tak konvergencia bude závisieť na tomto podiele. Ak má z reálnu hodnotu v absolútnej hodnote menšiu ako 1 rad bude konvergovať. To isté platí pre komplexné hodnoty z tvaru $x+iy$ s podmienkou $x^2+y^2<1$. Pre reálne hodnoty z väčšie ako 1, alebo komplexné tvaru $x+iy$, pre ktoré platí $x^2+y^2>1$ rad diverguje. A konečne pre hodnoty $z=\pm 1$ (alebo všeobecnejšie pre hodnoty tvaru $x+iy$ kde $x^2+y^2=1$) konvergencia alebo divergencie radu závisí od koeficientov α, β, γ.

Ak sú parametre α, β, γ všetky kladné, tak všetky koeficienty mocnín z budú kladné. Ak jeden z nich bude záporný tak všetky koeficienty budú mať rovnaké znamienko počnúc nejakým z^m, v prípade, že m bude väčšie ako najväčší záporný parameter. Suma radu pre $z=1$ nemôže byť konečná kým nezačnú koeficienty od určitého bodu úplne klesať . Ak $\alpha+\beta-\gamma-1$ je kladné, koeficienty pri mocninách sa zväčšujú až do konca radu. Ak $\alpha+\beta-\gamma-1=0$ koeficienty konvergujú kontinuálne ku konečnej limite. Ak je $\alpha+\beta-\gamma-1$ záporné tak koeficienty sa zmenšujú do nekonečna. Suma je konečná ak $\alpha+\beta-\gamma$ je záporné.

3.3.3 Niels Henrik Abel (1802 - 1829)

Niets Henrik Abel sa narodil roku 1802 v Nórskom meste Finnoy a zomrel na tuberkulózu v roku 1829 v Oslo. V roku 1815 nastúpil na katedrálnu školu v Oslo. Na tejto škole objavil a podporil jeho nadanie na matematiku jeho učiteľ Bernta Holmboea. Okolo roku 1820 si Abel myslel, že objavil riešenie rovníc piateho stupňa, ale zistil že sa mýlil a neskôr dokázal neriešiteľnosť tohto problému. V roku 1823 objavil inverziu, ktorá je kľúčom k eliptickým funkciám a objavil všeobecnú vetu integrovaní známu pod menom Abelova veta. V roku 1824 dostal štipendium na cestu do Paríža. Odtiaľ v roku 1825 odcestoval do Berlína za priateľmi, kde sa zoznámil s Augustom Crellom, amatérskym matematikom, ktorý založil prvý nemecký matematický časopis, v ktorom Abel uverejnil svoje matematické výsledky. V roku 1827 sa vrátil do Oslo. V septembri 1827 bola jeho práca o eliptických funkciách uverejnená v Creellovom žurnále. Tesne pred smrťou mal byť menovaný profesorom v Berlíne.

Abel podobne ako Cauchy definoval niekoľko pojmov:

„Ľubovoľný rad

$$v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots$$

nazývame *konvergentný* ak čiastočná suma $v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_m$ sa blíži k nejakej limite s rastúcim *m*. Limitu nazývame *suma radu*. Ak to neplatí tak rad nazveme *divergentný* a nemá sumu. Z tejto definície vyplýva, že aby rad konvergoval je nevyhnutné, aby suma $v_m + v_1 + v_2 + \ldots + v_{m+n}$ sa blížila k nule s rastúcim *m* bez ohľadu na *n*. V akomkoľvek konvergentnom rade preto hlavný člen v_m sa blíži k nule.“ (Birkhoff 1973, s. 68)

Abel sa zaoberal aj kritériami konvergencie. Napríklad pre rad $c_0 r_0 + c_1 r_1 + c_2 r_2 + \ldots$ s kladnými hodnotami $r_0, r_1, r_2, \ldots$ uvádza, že ak sa s monotónne sa zväčšujúcim *m* podiel r_{m+1}/r_m limitne blíži k číslu väčšiemu ako 1, potom tento rad diverguje s výnimkou toho, keď sa postupnosť $\{c_m\}$ blíži k nule. Ak sa podiel r_{m+1}/r_m limitne blíži k číslu β , ktoré je menšie ako 1 a hodnoty $c_0, c_1, c_2, \ldots$ neprevyšujú hodnotu 1, tak tento rad koverguje. Čo odôvodňuje takto:

Zvolíme *m* dostatočne veľké aby sme dostali $r_{m+1} < \alpha r_m < r_{m+2} < \ldots < r_{m+n} < \alpha r_{m+n-1}$ (kde $\beta < \alpha < 1$). Odtiaľ vyplýva, že $r_{m+k} < \alpha^k r_m$. Túto nerovnosť môžeme využiť a previesť na ďalšiu nerovnosť:

$$r_m + r_{m+1} + \ldots + r_{m+n} < r_m\left(1 + \alpha + \ldots + \alpha^n\right) < \frac{r_m}{(1-\alpha)},$$

ktorou sme získali horný odhad pre úsek radu bez koeficientov. Vieme že $\beta < \alpha < 1$ a že koeficienty neprevyšujú hodnotu 1. Preto môžeme v α nehradiť danými koeficientmi a dostaneme horný odhad pre úsek skúmaného radu:

$$c_m r_m + c_{m+1} r_{m+1} + \ldots + c_{m+n} r_{m+n} < \frac{r_m}{(1-\alpha)}.$$

Z toho, že $r_{m+k} < \alpha^k r_m$ a $\alpha < 1$ je jasné, že r_m sa bude s rastúcim *k* blížiť k nule a z nerovnosti vyššie vyplýva že suma

$$c_m r_m + c_{m+1} r_{m+1} + \ldots + c_{m+n} r_{m+n}$$

bude mať nulu ako limitu pre rastúce *n* z čoho už vyplýva konvergencia skúmaného radu.

Pre postupnosť ľubovoľných hodnôt $u_0, u_1, u_2, ..., u_m, ...$ ktorých čiastočná suma

$$s_m = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_m$$

ktorá je vždy menšia ako nejaká fixná hodnota δ platí, že pre ľubovoľné $c_0, c_1, c_2, ...$ kladné a zmenšujúce sa s rastúcim *m* platí odhad

$$R = c_0 u_0 + c_1 u_1 + c_2 u_2 + ... + c_m u_m < \delta c_0$$

Vieme že platí

$$u_0 = s_0, u_1 = s_1 - s_0, u_2 = s_2 - s_1, ...$$

Keď to dosadíme do odhadu pre *R* dostaneme

$$R = c_0 s_0 + c_1(s_1 - s_0) + c_2(s_2 - s_1) + ... + c_m(s_m - s_{m-1}) .$$

Jednotlivé zátvorky roznásobíme a upravíme

$$R = s_0(c_0 - c_1) + s_1(c_1 - c_2) + ... + s_{m-1}(c_{m-1} - c_m) + s_m c_m .$$

Abel uvádza, že Ak sú diferencie $c_0 - c_1, c_1 - c_2, ...$ sú kladné, tak hodnota *R* je očividne menšia ako δc_0. Je to vidieť aj z toho, keď odhadneme jenotlivé $s_i < \delta$ pre $i = 0, ..., m$

$$R = s_0(c_0 - c_1) + s_1(c_1 - c_2) + ... + s_{m-1}(c_{m-1} - c_m) + s_m c_m < \delta(c_0 - c_1) + \delta(c_1 - c_2) + ... + \delta(c_{m-1} - c_m) + \delta c_m$$

a po roznásobení sa jednotlivé členy navzájom odčítajú a ostane len δc_0.

Z modernej analýzy poznáme takzvané Abelovo kritérium ktoré sa dá zapísať asi takto: Nech $\{a_n\}$ je reálna, monotónna a konvergentná postupnosť a nech $\{b_n\}$ je komplexná postupnosť pre ktorú platí že $\sum_{n'0}^{\infty} b_n$ konverguje. Potom rad $\sum_{n'0}^{\infty} a_n b_n$ konverguje.

4 Záver

Táto práca zhŕňa poznatky o vývoji časti matematiky, ktorá sa venuje nekonečným radom. Je písaná chronologicky od staroveku po novovek. V niektorých prípadoch som porovnal výpočty starých matematikov s tým ako by to bolo možné počítať so súčasnými poznatkami. Pre čitateľa môže byť zaujímavé poznanie, ako asi počítali s nekonečnými radmi, často aj nesprávne, v minulosti a s akými problémami sa museli matematici popasovať, aby sme v súčasnosti tieto poznatky mohli využiť pri mnohých výpočtoch a v konečnom dôsledku aj v praxi. Na záver práce uvádzam stručný chronologický prehľad jednotlivých objavov v oblasti nekonečných radov, ktoré som uviedol v tejto práci.

tabuľka Strssbg. 362 (asi 2000 až 1800 p.n.l.)

-súčet konečnej aritmetickej a geometrickej postupnosti

Káhúnských papyrusov (asi 1825 p.n.l.)

- stĺpec desiatich čísel, ktoré tvoria aritmetickú postupnosť

Rhindov papyrus (asi 1650 p.n.l. prepis z 19. storočia p.n.l.)

-súčet konečnej aritmetickej postupnosti, súčet konečnej geometrickej postupnosti

Zenón z Eley (približne 490 – 430 p.n.l.)

-apórie

Eudoxos z Knidu (asi 408 – 355 p.n.l.)

-exhaustívna metóda

Euklides (4. až 3. st. p. n. l.)

-geometrická postupnosť, súčet konečného geometrického radu

Archimedes zo Syrakus (okolo 287 do 212 p.n.l.)

-pri výpočte kvadratúry paraboly Eudoxovu exhaustívnu metódu

Leonardo Pisánsky (Fibonacci) (1170 - 1240)

-Fibonacciho postupnosť, sčítanie aritmetickej a geometrickej postupnosti

Richard Swineshead (14. stor.)

-v úlohe o zrýchlenom pohybe použil nekonečný rad

Nicole Oresme (1323 - 1382)

-dokázal divergenciu harmonického radu

Nicolaus Mercator (1620 - 1687)

-Mercatorov rad pre logaritmus

James Gregory (1638 - 1675)

-Gregoryho rad pre arcustangens

IsaacNewton (1643 - 1727)

-všeobecná binomická formulu, Newtonova metóda obrátenia radov

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716)

-harmonický trojuholník

Jakkob Bernulli (1654 - 1705)

-5 prác o radoch, ktoré vyšli pod názvom *Aritmetické vety o nekonečných radoch a ich konečný súčet*

Johann Bernoulli (1667 - 1748)

-dokázal divergenciu harmonického radu

Abraham de Moivre (1667 - 1754)

-formula na vyjadrenie n-tého člena Fibonacciho postupnosti

Guido Grandi (1671 - 1742)

-prispel k polemike o sčítaní a konvergencii nekonečných radov

Brook Taylor (1685-1731)

-Taylorov rad

Leonard Euler (1707 - 1783)

-vyriešil Basselov problém, vzťah zeta funkcie a prvočísiel

Joseph Fourier (1768-1830)

-Fourierove rady

Augustin Louis Cauchy (1789 - 1857)

-definoval pojmy: postupnosť, súčet radu, konvergentný rad a divergentný rad, kritérium konvergenice

Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855)

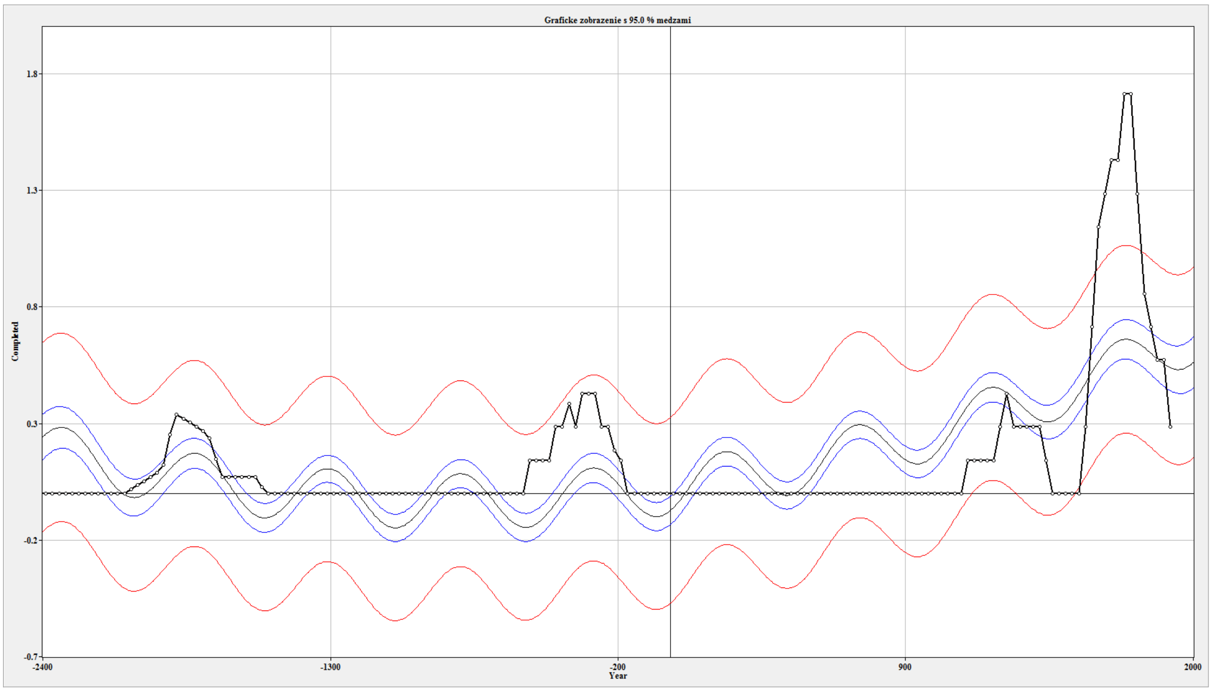
-definoval hypergeometrický rad

Niels Henrik Abel (1802 - 1829)

-definoval pojmy: konvergentný a divergentný rad, suma radu, a uviedol niektoré kritériá konvergencie radov

Vzhľadom na to, že táto práca pojednáva o dejinách stojí za zmienku poukázať na objav, ktorý urobil súčasný slovenský sofiológ RNDr. Emil Páleš, CSc. a ktoré prezentoval vo svojom diele *Angelológia dejín,* prvýkrát vydanom v roku 2001. Synchronicita znamená, že niektoré javy (napr. rozvoj matematiky) sa dejú paralelne v rôznych krajinách a periodicita znamená, že javy sa v nejakom rytme pravidelne opakujú. Páleš objavil približne 500-ročné rytmy v dejinách tvorivosti a doložil ich existenciu štatisticky v stovkách prípadov na dátach zostavených nezávislými odborníkmi. Existujú v celom rade kultúrnych odvetví u všetkých civilizácií a v celých dejinách. Čas a obsah týchto dejinných rytmov bol známy už v staroveku a pripisoval sa inšpirácii božstiev či archanjelov ako duchov času.

Pozrime sa, či aj v dejinách nekonečných radov existuje rytmus. Dáta obsiahnuté v tejto práci sme spracovali regresne pomocou periodickej funkcie. Je to často používaná metóda na testovanie periodicít časových radov v chronobiológii (podrobnosti pozri v Bingham a spol., 1982). (Autorom programu je Ing. Alexander Valach)



Tento chronogram je zostavený z 25 najvýznamnejších objaviteľov v oblasti nekonečných radov, uvedených v tejto práci. Na vodorovnej osi je čas, na zvislej počet tvorivých osobností. Obsahuje signifikantný rytmus s dĺžkou periódy 505 rokov a kulmináciami okolo rokov 1790 pr.n.l., 290 pr.n.l., 1210 n.l., 1710 n.l. Pravdepodobnosť náhody je $p < 0{,}0002$.

Tento rytmus bol v starovekej angelológii známy ako rytmus archanjela Rafaela. K symbolike tohto archetypu patria rekurentné štruktúry v prírode, napríklad reťazenie listov na stonke. Je zaujímavé, že v týchto obdobiach bolo rytmické opakovanie prvkov často ústredným architektonickým motívom, napríklad u gotických katedrál alebo čínskych pagod s rytmicky sa opakujúcimi strechami. Počas rokoka sa tento princíp prejavil v odievaní.

Matematické rady majú takúto rekurentnú štruktúru a azda zvýšený záujem o ne a následné objavy boli podmienené aj estetickou záľubou v takýchto štruktúrach počas rafaelských období.

Zoznam použitej literatúry

Bečvár J., Bečvářová M., Vymazalová H.(ed.): *Matematika ve starověku Egypt a Mezopotámie*. Prometheus, Praha 2003.

Bečvář J. a Fuchs E.(ed.): *Matematika v proměnách věkú*. Prometheus, Praha 1998,

Bečvář J. a Fuchs E.(ed.): *Matematika v 16. a 17. století.* Prometheus, Praha 1999

Bingham Ch., Arbogast B., Cornélissen G. G., Lee J. K., Halberg F.: *Inferential statistical methods for estimating and comparing cosinor parameters*. Chronobiologia, vol. 9, 1982, p. 397-439.

Birkhoff G. a Mezenbach U. (ed.): *A source book in classical analysis*. Harvard University Press, Massachusetts 1973.

Boyer C. B., Merzbach U.: *A history of mathematics* (second edition), Wiley, New York 1989.

Fuchs E.: *Významný matematikovia 16. a 17. století.* In: *Matematika v 16. a 17. století.* Prometheus, Praha 1999

Hobst E. a Hobstová M.: Carl Friedrich Gauss – zakladateľ modernej matematiky. *Pokroky matematiky fyziky & astronomie (4)* 52/2007, Praha

Hobst E. a Hobstová M.: 300. výročie narodenia Leonharda Eulera., *Pokroky matematiky fyziky & astronomie (2)* 52/2007, Praha

Juškevič A. P.: *Dějiny Matematiky ve stredověku*. Academia, Praha 1977.

Kolman A., *Dějiny matematiky ve starověku*. Academia, Praha 1968.

Konforovič A. G.: *Významné matematické úlohy*. SNP, Kijev 1981.

Kosmák L.: *Základy matematickej analýzy*. ALFA, Bratislava 1984.

Kvasz L.: Dejiny mocninných radov. *Matematické obzory* 41/1994, Bratislava

Páleš Emil: *Angelologie dějin.* Sophia, Bratislava 2004.

Stillwell J: *Mathematics and its history*. Springer, New York 2004

Šalát T.:*Malá encyklopédia matematiky.* Obzor, Bratislava 1981

Trojovský P.: *Kořeny a vývoj pojmu konvergentní číselná řada.* In: *Člověk-umění-matematika,* Dějiny matematiky, svazek 4. Prometheus, Praha 1996

Trojovský P.: *Číselné řady u Bernoulliú* In: *Matematika v proměnách věkú*. Prometheus, Praha 1998

Znám Š. a kol.: *Pohľad do dejín matematiky*. ALFA SNT, Praha 1986

Zdroje z internetu:

http://www.wikipedia.org (marec 2009)

http://www.brooktaylor.net (marec 2009)

http://www-history.mcs.st-and.ac.uk (apríl 2009)

http://www.sophia.sk (apríl 2009)

http://pf.ku.sk/katedry/kmat/data/konferenciasub/pdf2001/Bezakova.pdf (apríl 2009)

http://news.bbc.co.uk (apríl 2009)